തുല്യതാ പാഠാവലി

ഗണിതശാസ്ത്രം

സ്റ്റാൻഡേർഡ്
10

കേരള സർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസ വകുപ്പ്

തയാറാക്കിയത്
കേരളസംസ്ഥാന സാക്ഷരതാമിഷൻ അതോറിറ്റി (കേ.സം.സാ.മി.അ)

2020

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു. സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യ പൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്ന വരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമ ത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by:
State Literacy Mission Authority (KSLMA)
'Aksharam', Near Pettah Boys HSS, Pettah P.O., Thiruvananthapuram - 695 024

Website	:	www.literacymissionkerala.org
e-mail	:	info.kslma@kerala.gov.in
Phone	:	0471-2472253/2472254, Fax: 0471-2462252
First Edition	:	2020
Typesetting, Layout & Cover	:	sanil alathoor
Printed at	:	KBPS, Kakkanad, Kochi-30
Price	:	₹ **70.00**

ആമുഖം

ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ധാരാളം അറിവുകൾ നമ്മളോരോരുത്തരും സ്വായത്തമാക്കിയിട്ടുണ്ട്. നമുക്ക് പരിചിതമായ സന്ദർഭങ്ങളിലൂടെ അവതരിപ്പിച്ച്, ഇത്തരം അറിവുകളുടെ യുക്തി മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും അതിലൂടെ വിഭിന്നങ്ങളായ പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കു ന്നതിനുമാണ് പ്രധാനമായും പാഠപുസ്തകത്തിൽ ശ്രമിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇത്തരം ഒരു രീതി സ്വീകരിച്ചതുകൊണ്ടുതന്നെ, ഒരു പരിശീലകന്റെ സഹായമില്ലാതെ സ്വയം വായിച്ചും, ചിന്തിച്ചും വിവിധ പ്രവർത്തനങ്ങൾ ചെയ്തും ഇതിൽ ഉൾക്കൊള്ളിച്ചിരിക്കുന്ന ആശയങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും. ആശയസമ്പാദനത്തിനും പ്രയോഗിക പ്രശ്നപരിഹാരത്തിനും അതുവഴി തൊഴിൽനൈപുണ്യം നേടി ജീവിതനിലവാരം മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നതിനും ഈ പാഠപുസ്തകം നിങ്ങളെ സഹായിക്കട്ടെ എന്ന് ആശംസിക്കുന്നു.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. പി എസ് ശ്രീകല
ഡയറക്ടർ
കേരളസംസ്ഥാന സാക്ഷരതാമിഷൻ അതോറിറ്റി

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

അധ്യാപകർ

രാജേശ്വരി ബി	അസി. പ്രൊഫസർ, സർക്കാർ വനിതാ കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം
വിജയകുമാർ ടി.കെ.	ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. ചെർക്കള, കാസറഗോഡ്
രാമാനുജം ആർ	എം.എൻ.കെ.എം.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. പുലാപ്പറ, പാലക്കാട്
അച്യുതൻ സി.ജി.	ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കാരാക്കുറിശി, പാലക്കാട്
ഉണ്ണിക്കൃഷ്ണൻ എം.വി.	ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കുറ്റിയേരി, തളിപ്പറമ്പ
ഷൈജ യു.ജി.	ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വടനാംകുറിശി, പാലക്കാട്

ചിത്രരചന

ബിമൽകുമാർ എസ്.	ചിത്രകലാധ്യാപകൻ ജി.എം.ബി.എച്ച്.എസ്.എസ്. തേവള്ളി, കൊല്ലം

അക്കാദമിക ചുമതല

ഡോ. ഷേർലി വളാന്തറ	(റിട്ട.) അസോ. പ്രൊഫസർ

വിദഗ്ധസമിതി

കെ.കെ. കൃഷ്ണകുമാർ	സീമ-61, ആന്നയറ നഗർ, തിരുവനന്തപുരം

കോ-ഓർഡിനേഷൻ

കെ. അയ്യപ്പൻ നായർ	അസി. ഡയറക്ടർ (തുല്യത & അക്കാദമിക്) സംസ്ഥാന സാക്ഷരതാമിഷൻ

കോ-ഓർഡിനേഷൻ സഹായം

രഞ്ജി എസ് എസ്	പ്രോഗ്രാം ഓഫീസർ, സംസ്ഥാന സാക്ഷരതാമിഷൻ

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ് -

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയ സേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദ്ദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക. സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സമ്മിശ്ര സംസ്കാരത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽക്കൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക.

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ രക്ഷ്യബാലകനോ, അതതു സംഗതിപോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

ഉള്ളടക്കം

സമാന്തരശ്രേണി

1

1, 2, 3,... എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളിലെ 10-ാം സംഖ്യ ഏതാണ്? 10 അല്ലേ. 25-ാം സംഖ്യയോ? 25. അപ്പോൾ നൂറാം സംഖ്യയോ?

2, 4, 6, 8,... എന്ന ഇരട്ടസംഖ്യകളെടുത്താലോ? 10-ാമത്തെ സംഖ്യയേതാണ്? 20 ശരിയാണ്. 25-ാം സംഖ്യയോ? നൂറാം സംഖ്യയോ?

ഈ കൂട്ടത്തിലെ ഏതു സ്ഥാനത്തെ പദം കാണാനും പദസ്ഥാനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ ഇരട്ടി കണ്ടാൽ മതിയാകും.

6, 11, 16, 21,... എന്ന സംഖ്യകളെടുത്താലോ?

1-ാം പദം	$= 5 \times 1 + 1$	$= 6$
2-ാം പദം	$= 5 \times 2 + 1$	$= 11$
3-ാം പദം	$= 5 \times 3 + 1$	$= 16$
100-ാം പദം	$= 5 \times 100 + 1$	$= 501$

ഇവയ്ക്കെല്ലാം ചില പ്രത്യേകതകൾ ഉണ്ട്. എല്ലാ കൂട്ടം സംഖ്യകളും ഏതെങ്കിലും നിയമമനുസരിച്ച് ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത്... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതാൻ കഴിയുന്നവയാണ്. ഇവയെ സംഖ്യാശ്രേണി (Number Sequence) എന്നാണ് വിളിക്കാറ്.

ഇതിൽ ഒന്നാമത്തെ ശ്രേണി, ഒന്നിൽനിന്നും തുടങ്ങി 1 കൂട്ടി എഴുതുന്നതാണ്. രണ്ടാമത്തെ ശ്രേണി, രണ്ടിൽനിന്നും തുടങ്ങി 2 കൂട്ടി എഴുതുന്നതാണ്. മൂന്നാമത്തെ ശ്രേണി, ആറിൽനിന്നും തുടങ്ങി 5 കൂട്ടി എഴുതുന്നതാണ്. ഇങ്ങനെ ഒരേ സംഖ്യ കൂട്ടി എഴുതുന്ന ശ്രേണിയെ സമാന്തരശ്രേണി (Arithmetic Progression) എന്നാണ് വിളിക്കാറ്. കൂട്ടി എഴുതുന്ന ഒരേ സംഖ്യയെ പൊതുവ്യത്യാസം (Common Difference) എന്നും. മറ്റുദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

1) 1, 3, 5, 7, 9,...

2) 2, 6, 10, 14,...

3) 3, 8, 13, 18, 23,...

ഇവയും സമാന്തരശ്രേണികൾ തന്നെയാണ്. ഓരോന്നിന്റെയും പൊതുവ്യത്യാസം എഴുതാമല്ലോ.

- 1, 4, 9, 16,... എന്ന സംഖ്യാശ്രേണി ശ്രദ്ധിക്കൂ. 1, 2, 3,...... തുടങ്ങിയ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളാണ് ഇവ. ഇവിടെ 10-ാം പദം $10^2 = 100$, 25-ാം പദം $25^2 = 625$ പദം. പക്ഷേ, സമാന്തരശ്രേണിയല്ല. കാരണം കണ്ടുപിടിക്കുമല്ലോ?
- സമാന്തരശ്രേണിയല്ലാത്ത സംഖ്യാശ്രേണികൾക്ക് 3 ഉദാഹരണങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം

10, 20, 30,... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ഏതു സ്ഥാനത്തെ പദം കാണാനും എന്താണ് മാർഗം?

പദസ്ഥാനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതി. ഇനി,

11, 21, 31, 41,... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയായാലോ?

1-ാം പദം $= 10 \times 1 + 1 = 11$

2-ാം പദം $= 10 \times 2 + 1 = 21$

3-ാം പദം $= 10 \times 3 + 1 = 31$

....

51-ാം പദം $= 10 \times 51 + 1 = 511$

ഏത് പദം കാണാനും പദസ്ഥാനത്തെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ഒന്ന് കൂട്ടിയാൽ മതി.

12, 22, 32, 42,... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലോ?

1-ാം പദം = 10 × ___ + ___ = 12

2-ാം പദം = 10 × ___ + ___ = 22

3-ാം പദം = 10 × ___ + ___ = 32

....

18-ാം പദം = 10 × ___ + ___ = 182

- 9, 19, 29,... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 50, 75, 100 സ്ഥാനങ്ങളിലെ പദങ്ങൾ പറയാമോ?

3, 10, 17,.... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം എത്രയായിരിക്കും? 25-ാം പദം, 100-ാം പദം മുതലായവയും കണ്ടുപിടിക്കുക.

$17 - 10 = 10 - 3 = 7$ ആണ് പൊതുവ്യത്യാസം.

ഏഴിന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ എഴുതിനോക്കാം. 7, 14, 21,...

ഇവയിൽനിന്നും 4 വീതം കുറവാണല്ലോ നമ്മുടെ ശ്രേണിയുടെ പദങ്ങൾ

അതായത്,

1-ാം പദം $= 7 \times 1 - 4 = 3$

2-ാം പദം $= 7 \times 2 - 4 = 10$

3-ാം പദം $= 7 \times 3 - 4 = 17$

....

25-ാം പദം $= 7 \times 25 - 4 = 171$

....

100-ാം പദം = ____________

ഈ ശ്രേണിയിലെ ഏതു പദം കണ്ടുപിടിക്കുവാനും പദസ്ഥാനത്തെ 7 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 4 കുറച്ചാൽ മതി.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഈ ശ്രേണിയുടെ n-ാം പദം (ഏതു പദത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു) $7n - 4$ എന്ന് പറയും.

3, 8, 13,... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ n-ാം പദം പറയാമോ?

ഇവിടെ പൊതുവ്യത്യാസം 5 ആണ്. 5, 10, 15,... എന്ന 5 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ എടുത്താൽ, തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ രണ്ടുവീതം കുറവാണ്.

1-ാം പദം $= 5 \times 1 - 2$

2-ാം പദം $= 5 \times 2 - 2$

3-ാം പദം $= 5 \times 3 - 2$

....

n-ാം പദം $= 5 \times n - 2$

താഴെപ്പറയുന്ന സമാന്തരശ്രേണികളുടെ പൊതുവ്യത്യാസവും n-ാം പദവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

- 7, 12, 17, 22,...
- 3, 5, 7, 9, ...
- 5, 9, 13, 17, ...

ചില പ്രത്യേകതകൾ

1, 2, 3... എന്ന ഏറ്റവും ലളിതമായ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 3 പദങ്ങളുടെ തുക

$1 + 2 + 3 = 6$. ഇത് മധ്യപദമായ 2 ന്റെ മൂന്നിരട്ടിയാണല്ലോ?

മറ്റു സമാന്തരശ്രേണികളിൽ ഇത് ശരിയാകുമോ എന്ന് നോക്കാം.

5, 10, 15, 20,... എന്ന ശ്രേണിയിൽ,

$5 + 10 + 15 = 30 = 10 \times 3$

4, 7, 10,... എന്ന ശ്രേണിയിലായാലോ? അപ്പോഴും ശരിയാണെന്ന് കാണാം. അടുത്തടുത്ത ഏത് മൂന്ന് പദങ്ങളെടുത്താലും ശരിയാകുന്നുണ്ടോ?

ശ്രേണിയിലെ കൂടുതൽ പദങ്ങളെടുത്ത് ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ...

ഇനി ഏത് സമാന്തരശ്രേണിക്കും ഇത് ശരിയാണോ? സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് പദങ്ങളെ

$x-d, x, x+d$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. ഇവിടെ d പൊതുവ്യത്യാസമാണ്.

$x-d + x + x + d = 3x$

> ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ
> തുക, മധ്യപദത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടിയാണ്.

തുടർച്ചയായ 5 പദങ്ങൾ എടുത്ത് നോക്കാം. ഈ പദങ്ങൾ $x-2d, x-d, x, x+d, x+2d$ ആയിരിക്കും. ഇവയുടെ തുക,

$$x-2d + x-d + x + x+d + x+2d = 5x$$

മധ്യപദത്തിന്റെ അഞ്ചിരട്ടി. ഇവിടെയും മധ്യപദത്തെ എണ്ണംകൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതാണ് മൊത്തം പദങ്ങളുടെ തുക. തുടർച്ചയായ ഏഴു പദങ്ങളെടുത്താലും, മൊത്തം പദങ്ങളുടെ തുക മധ്യപദത്തിന്റെ ഏഴിരട്ടി ആയി കിട്ടും.

9 പദമായാലും, 11 പദമായാലും ഈ പ്രത്യേകതയുണ്ടാകും. മുകളിൽ പറഞ്ഞ എല്ലാ സന്ദർഭങ്ങളിലും പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യയാകണം. അപ്പോൾ പദങ്ങളുടെ

എണ്ണം ഇരട്ട സംഖ്യയായാലോ? നടുവിൽ വരുന്ന രണ്ട് പദങ്ങളുടെ ശരാശരിയെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതിയാകും.

ഒന്നു മുതൽ 25 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഒന്നു മുതൽ 25 വരെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ 13 ആണ് മധ്യസംഖ്യ. അപ്പോൾ,

സംഖ്യകളുടെ തുക $= 13 \times 25 = 325$.

6, 8, 10, 12, 14, 16 ഇവയുടെ തുക കണ്ടെത്തുക.

10, 12 ആണല്ലോ മധ്യത്തിൽ വരുന്ന സംഖ്യകൾ. ഇവയുടെ

ശരാശരി $= \frac{10+12}{2} = \frac{22}{2} = 11$

ആകെ 6 പദങ്ങളാണുള്ളത്

അപ്പോൾ സംഖ്യകളുടെ തുക $= 11 \times 6 = 66$.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

6, 13, 20,.... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഇവിടെ പൊതുവ്യത്യാസം 7 ആണ്. 7, 14, 21,... ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളിൽ നിന്നും ഒന്ന് കുറച്ചാൽ തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണി കിട്ടും. അതുകൊണ്ട്,

n-ാം പദം $= 7n - 1$

ആകെയുള്ള 20 പദങ്ങളിൽ, പത്തും പതിനൊന്നും സ്ഥാനങ്ങളിലാണ് മധ്യപദങ്ങൾ വരുന്നത്.

10-ാം പദം $= (7\times10) - 1 = 69$

11-ാം പദം $= 69 + 7 = 76$

ഇവയുടെ ശരാശരി $= \frac{69+76}{2} = 72.5$

20 പദങ്ങളുടെ തുക $= 72.5 \times 20 = 1450$

സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, ഇവയുടെ തുക കാണാൻ മധ്യപദത്തെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതി. പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ പദങ്ങളുടെ തുക കാണുവാൻ മധ്യത്തിൽ വരുന്ന രണ്ട് പദങ്ങളുടെ ശരാശരിയെ എണ്ണംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതി.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കൂ.

6, 10, 14, 18,......... 86 ഈ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ തുക കാണണമെങ്കിലോ?

ഇവിടെ എത്ര പദങ്ങൾ ഉണ്ട്? എത്രാമത്തെ പദമാണ് മധ്യപദം?

അതു കണ്ടെത്തുവാൻ ഈ ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദമാണ് 86 എന്ന് എടുക്കാം.

അപ്പോൾ $4n+2=86$ എന്നെഴുതാം. ഇതിൽനിന്നും $4n = 84$, $n = 21$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതായത് 21 പദങ്ങൾ ഉണ്ട്. അപ്പോൾ 11-ാം പദമാണ് മധ്യപദം. പദങ്ങളുടെ തുക കാണാൻ 11-ാം പദം കണ്ടുപിടിച്ച് 21കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

11-ാം പദം = $4\times11+2 = 46$

തുക = $46 \times 21= 966$ എന്നു കിട്ടും

ചെയ്തുനോക്കാം

1) ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയിലും പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടെത്തുക.
   a) 6, 11, 16, 21, ... 151
   b) 6, 14, 22, 30, ... 86
   c) 4, 10, 16, 22,......... 88

2) താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ പത്ത് പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടെത്തുക.
   a) 11, 22, 33, 44,...
   b) 1, 6, 11, 16,...
   c) 4, 9, 14, 19,...

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

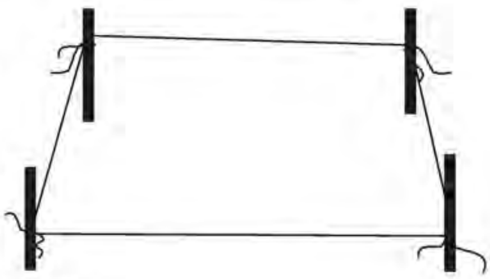
- സമാന്തരശ്രേണിയെ മനസ്സിലാക്കുന്നു. പദസ്ഥാനങ്ങളും പൊതുവ്യത്യാസവും പദങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം രൂപീകരിക്കുന്നു.
- സമാന്തരശ്രേണിയുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.

പൈഥാഗറസ് തത്വം

2

മട്ടം

അപ്പുവിന്റെ വീടിന് കുറ്റിയടിക്കുകയാണ് രാമൻ മൂത്താശാരി. കൂടെ സഹായി അനന്തുവുമുണ്ട്.



ചതുരാകൃതിയിലാണ് പ്ലാനിന്റെ പുറം അതിര്.

ചതുരാകൃതിയിൽ അതിര് നിശ്ചയിക്കണമല്ലോ? എന്തൊക്കെ കാര്യങ്ങൾ ഇതിനായി ശ്രദ്ധിക്കണം?

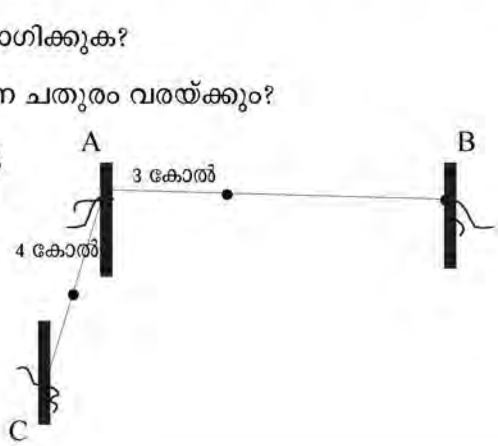
ചതുരത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകളെന്തൊക്കെയാണ്?

- ചതുരത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യം.
- കോണുകളെല്ലാം മട്ടം (അഥവാ 90^0).

കടലാസിൽ ചതുരം വരയ്ക്കാൻ എളുപ്പമാണല്ലോ? വരച്ചുനോക്കൂ. മൂലകളിൽ മട്ടമുണ്ടാക്കാൻ അറിയുമല്ലോ?

അതിന് എന്ത് ഉപകരണമാണ് ഉപയോഗിക്കുക?

എന്നാൽ തറയിൽ (നിലത്ത്) എങ്ങനെ ചതുരം വരയ്ക്കും?



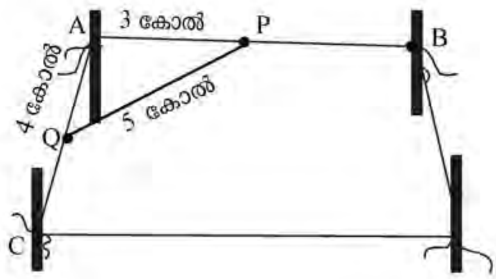
രാമനാശാരി എന്താണ് ചെയ്തതെന്നു നോക്കാം. A, B, C എന്നീ കുറ്റികൾ ചേർത്ത് ചരട് വലിച്ചുകെട്ടിയിരിക്കുന്നു. A എന്ന കുറ്റി ഉറപ്പിച്ചതാണ്. B യുടെയും C യുടെയും സ്ഥാനം മാറ്റാവുന്നതാണ്.

AB യിൽ 3 കോൽ അളന്നെടുത്ത് P അടയാളപ്പെടുത്തി. AC യിൽ 4 കോലെടുത്ത് Q വും അടയാളപ്പെടുത്തി. PQ എന്ന നീളം 5 കോല് ആകത്തക്കവിധം B യിലെയും C യിലെയും കുറ്റികളുടെ സ്ഥാനം ക്രമപ്പെടുത്തി. ഇപ്പോൾ A എന്ന മൂലയിൽ മട്ടകോൺ കിട്ടും.

ഇനി ചതുരം വരയ്ക്കാൻ എളുപ്പമാകും.

തറയിൽ കുറ്റിയടിക്കുമ്പോൾ മട്ടം എങ്ങനെ ഉണ്ടാകുന്നു എന്ന രീതി മനസ്സിലായോ?

മൂലയിൽ മട്ടം കിട്ടും എന്ന് എന്താണിത്ര ഉറപ്പ് എന്നാണ് അപ്പുവിന്റെ സംശയം.

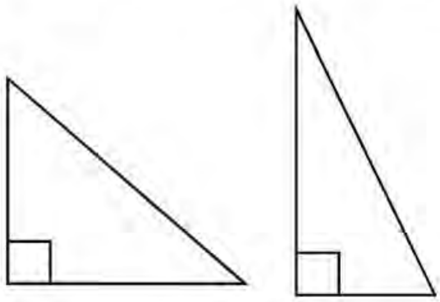


മട്ടത്രികോണം

ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ രണ്ട് മട്ടങ്ങളുടെയും പ്രത്യേകതയെന്തെന്ന് അറിയാമല്ലോ?

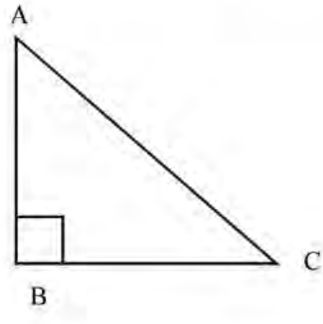
അവ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചത് നോക്കൂ. ഓരോന്നിലും ഒരു കോൺ 90^0 യാണ്. ഒരു കോൺ 90^0 (മട്ടം) ആയ ത്രികോണങ്ങളാണ് മട്ടത്രികോണങ്ങൾ. മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് പേര് നൽകുക.

മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ ഏറ്റവും വലിയ കോൺ എത്രയായിരിക്കും? ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശം ഏത് കോണിന് എതിരെയുള്ള വശമായിരിക്കും എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കൂ.



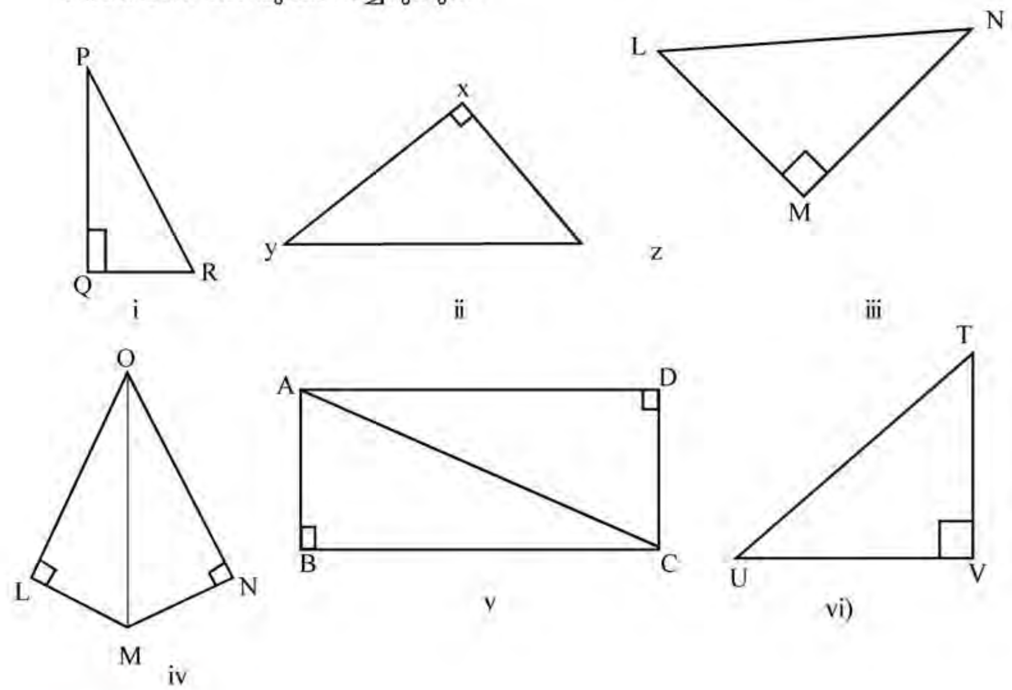
മട്ടകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന വശങ്ങളെ ലംബ വശങ്ങൾ എന്നാണ് പറയുക. ഏറ്റവും വലിയ വശത്തെ (മട്ടകോണിന് എതിരായ വശം) കർണം എന്നും പറയും.

ചിത്രത്തിൽ $\angle B = 90^0$. B യിൽ ചേരുന്ന AB യും BC യും ആണ് ലംബവശങ്ങൾ (പരസ്പരം കുത്തനെ നിൽക്കുന്ന വശങ്ങളാണല്ലോ ലംബങ്ങൾ). മട്ടകോണിന് എതിരായ വശം AC യാണ് കർണം.



ചെയ്തുനോക്കാം

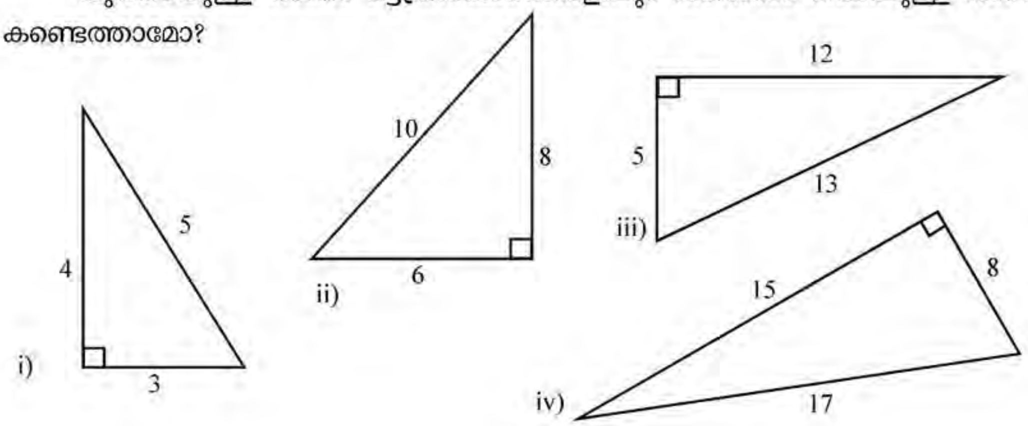
- ചുവടെ കൊടുത്ത ചിത്രങ്ങളിൽ കർണം, ലംബവശങ്ങൾ എന്നിവ ഏതൊക്കെയെന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചെഴുതുക.



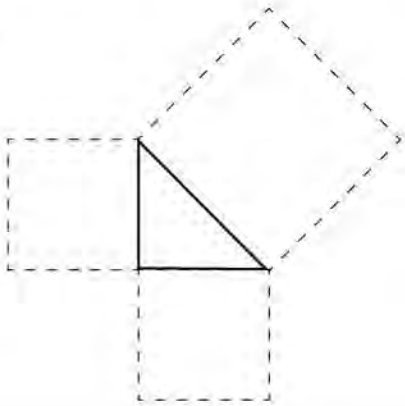
വശങ്ങളുടെ ബന്ധം

കുറ്റിയടിച്ചപ്പോൾ മട്ടം ആയിരിക്കുമെന്ന് പറഞ്ഞത് ഓർമ്മയുണ്ടല്ലോ? അപ്പുവിന്റെ സംശയവും ബാക്കിയാണ്. സംശയം തീർക്കാം.

ചുവടെയുള്ള ഓരോ മട്ടത്രികോണങ്ങളിലും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്താമോ?



ഒന്നാമത്തെ മട്ടത്രികോണമെടുക്കാം. അവയുടെ വശങ്ങളിൽ സമചതുരം വരച്ചതു നോക്കൂ.



ലംബവശങ്ങളിൽ വരച്ച സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ കണ്ട് തുക കണ്ടാലോ?

$(3 \times 3) + (4 \times 4) = 9 + 16 = 25$

അതായത്, $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

25 നെ 5×5 അഥവാ 5^2 എന്നെഴുതാമല്ലോ? ഇത് കർണത്തിൽ വരച്ച സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ്.

ലംബവശങ്ങളിലെ സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണ് കർണത്തിൽ വരച്ച സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ

$3^2 + 4^2 = 5^2$

ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക കർണത്തിന്റെ വർഗത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

മറ്റ് മട്ടത്രികോണങ്ങളിലും ഈ ബന്ധം ശരിയാകില്ലേ എന്ന് പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ.

$3 \times 3 = 9$

$4 \times 4 = 16$

$5 \times 5 = 25$

ഒരു സംഖ്യയെ ആ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ ആദ്യ സംഖ്യയുടെ വർഗം എന്നാണ് പറയുക.
3 ന്റെ വർഗമാണ് 9.
$3^2 = 9$ എന്നാണ് എഴുതുക.
ഇതുപോലെ $4^2 = 16$
$5^2 = 25$

(i) $6^2 =$ ______ , $8^2 =$ ______ , $10^2 =$ ______ $6^2 + 8^2 =$ ______

(ii) $5^2 =$ ______ , $12^2 =$ ______ , $13^2 =$ ______ $5^2 + 12^2 =$ ______

(iii) $8^2 =$ ______ , $15^2 =$ ______ , $17^2 =$ ______________________

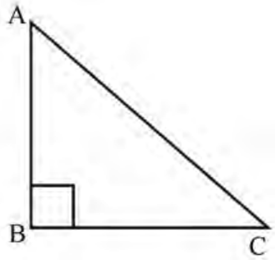
ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ ഏതൊരു മട്ടത്രികോണത്തിലും ലംബവശങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക കർണത്തിന്റെ വർഗത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും. ഈ ആശയം പൈഥാഗറസ് തത്വം എന്ന പേരിലാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

ഈ തത്വം തിരിച്ചും ശരിയാകും.

അതായത് ഏതെങ്കിലും ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാം വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന് തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ ത്രികോണം മട്ടത്രികോണ

മായിരിക്കും. വശങ്ങളുടെ ബന്ധം ഈ വിധമായ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് കോണുകൾ അളന്നു നോക്കൂ.

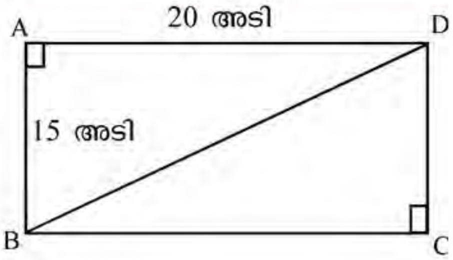
ഇനി അപ്പുവിന് സംശയമുണ്ടാകില്ലല്ലോ?



ചിത്രത്തിൽ ത്രികോണം ABC മട്ടത്രികോണമാണ്. മട്ടകോൺ B യും. പൈഥാഗറസ് തത്വപ്രകാരം

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ എന്നെഴുതാം.

വീടിലെ ഒരു മുറിയുടെ മേൽക്കൂരയിൽ കോണോടുകോൺ വൈദ്യുതി വയർ ഇടുന്നതിന് പൈപ്പ് ഇടണം. 15 അടി വീതിയും 20 അടി നീളവും ഉള്ള ചതുരാകൃതിയിലാണ് മുറി. എത്ര നീളത്തിൽ പൈപ്പ് വേണം?



ചിത്രത്തിൽ ABD എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ BD യുടെ നീളം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ നമുക്കാവശ്യമായ പൈപ്പിന്റെ നീളം കിട്ടുമല്ലോ?

മട്ടത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ വർഗബന്ധം ഉപയോഗിക്കൂ.

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

അതായത് $BD^2 = 15^2 + 20^2$

$= 225 + 400$

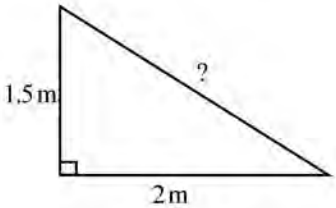
$= 625$

25 ന്റെ വർഗമാണ് 625.

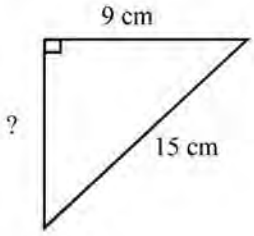
25 അടി നീളത്തിൽ പൈപ്പ് വേണം.

ചെയ്തുനോക്കാം

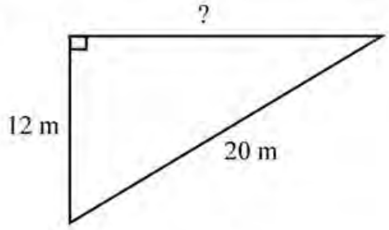
1) ചുവടെ കൊടുത്ത മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ 2 വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. മൂന്നാം വശത്തിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.



i



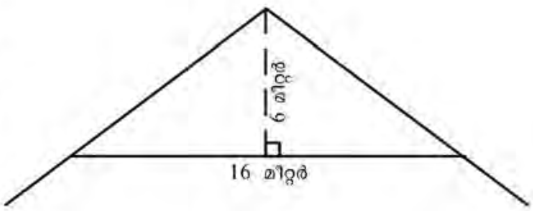
ii



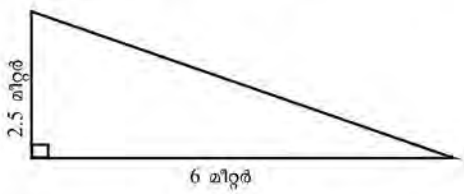
iii

2) 24 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ജലസംഭരണി (Watertank) യുടെ മുകളറ്റത്തിലേക്ക് തറയിൽനിന്നും ചരിഞ്ഞ് ഒരു ഏണി ഉണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നു. സംഭരണിയുടെ ചുവട്ടിൽനിന്നും 10 മീറ്റർ അകലെയാണ് ഏണിയുടെ ചുവട് എങ്കിൽ ഏണിക്ക് എത്ര നീളമുണ്ടാകും?

3) ഒരു സ്കൂളിന്റെ മേൽക്കൂരയുടെ ഒരു ഭാഗമാണ് ചിത്രത്തിൽ. വിലങ്ങനെയുള്ള ത്ലാനിന്റെ (Beam) നീളം 16 മീറ്ററും കുത്തനെയുള്ള തൂണിന്റെ ഉയരം 6 മീറ്ററും ആണ്. കഴുക്കോലുകളുടെ നീളം എത്രയാകണം. 1 മീറ്റർ വീതം കഴുക്കോൽ ബീമിനു പുറത്തേക്ക് നീട്ടിയാണ് വച്ചിരിക്കുന്നത്.



4) 2.5 മീറ്റർ ഉയരവും തറയിലെ നീളം 6 മീറ്ററും ആയ റാമ്പിന്റെ ചരിഞ്ഞ പ്രതലത്തിന്റെ നീളം എത്രയാകും?



പഠനനേട്ടങ്ങൾ

- മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം വിശദീകരിക്കുന്നു.
- പ്രായോഗികപ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നു.

3 സമവാക്യങ്ങൾ

റഹീമും ഹമീദും സഹോദരങ്ങളാണ്. റഹീമിന് 30 വയസ്സാണ് പ്രായം. ഹമീദിന് റഹീമിനേക്കാൾ 10 വയസ്സ് കുറവാണ്. എങ്കിൽ ഹമീദിന്റെ പ്രായമെത്ര?

വലിയ കണക്കുകൂട്ടലുകളൊന്നും കൂടാതെ തന്നെ ഈ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം കണ്ടെത്താം. ഹമീദിന്റെ പ്രായം റഹീമിന്റേതിനേക്കാൾ 10 വയസ്സ് കുറവാണല്ലോ.

അതായത് 30 നേക്കാൾ 10 കുറവ്.

അതിനാൽ ഹമീദിന്റെ പ്രായം $= 30 - 10$

$= 20$ ആണെന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

ചോദ്യത്തിൽ ഒരു ചെറിയ മാറ്റം വരുത്തിയാലോ?

സതീഷിന്റെ ഒരുദിവസത്തെ കൂലി മേസ്തിരിയുടെ കൂലിയേക്കാൾ 50 രൂപ കുറവാണ്. സതീഷിന്റെ ഒരുദിവസത്തെ കൂലി 850 രൂപയാണെങ്കിൽ മേസ്തിരിയുടെ കൂലി എത്ര?

ഈ ചോദ്യം എങ്ങനെയാണ് ആദ്യത്തെ ചോദ്യത്തിൽനിന്നും വ്യത്യാസ പ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്? ഇവിടെ മേസ്തിരിയേക്കാൾ 50 രൂപ കൂലി കുറവായ സതീഷിന്റെ കൂലിയാണ് 850 രൂപ.

അപ്പോൾ മേസ്തിരിക്ക് സതീഷിനേക്കാൾ കൂലി 50 രൂപ കൂടുതലാണ്.
അതായത്,

മേസ്തിരിയുടെ കൂലി = സതീഷിന്റെ കൂലി + 50

$= 850 + 50$

$= 900$ രൂപ

ഇതുപോലെ ചില ചോദ്യങ്ങൾ നമുക്ക് മനക്കണക്കായി ചെയ്തുനോക്കാം.

1. ഒരു പാത്രത്തിൽ കുറേ നാരങ്ങ ഉണ്ട്. അതിൽനിന്ന് 25 എണ്ണം വിറ്റപ്പോൾ പാത്രത്തിൽ 27 എണ്ണം ബാക്കിയായി. എങ്കിൽ പാത്രത്തിൽ എത്ര നാരങ്ങ ഉണ്ടായിരുന്നു?
2. ഒരു സംഖ്യയുടെ കൂടെ 7 കൂട്ടിയാൽ 22 കിട്ടും. സംഖ്യ ഏത്?
3. ദിവസക്കൂലിയുടെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗം, അയൽക്കൂട്ടത്തിന്റെ കുറിപ്പൈസ കൊടുക്കുന്നതിനായി എല്ലാ ദിവസവും മാറ്റിവയ്ക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ വേണു മാറ്റിവയ്ക്കുന്ന തുക 125 രൂപയാണ്. എങ്കിൽ വേണുവിന്റെ ദിവസക്കൂലി എത്ര?
4. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 52 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്. ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്ര?
5. രാജൻ കടയിൽനിന്ന് 40 കിലോ അരി വാങ്ങിയപ്പോൾ ആകെ വിലയിൽ 60 രൂപ ഇളവ് കിട്ടി. അരിയുടെ വിലയായി 1340 രൂപ നൽകി. അരിയുടെ യഥാർത്ഥ വില എത്രയായിരുന്നു?

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രശ്നം നോക്കാം.

രാധയുടെ ഭാരം സഹോദരൻ രാജുവിന്റെ ഭാരത്തേക്കാൾ 10 കിലോഗ്രാം കുറവാണ്. രാജുവിന്റേയും രാധയുടേയും കൂടി ആകെ ഭാരം 50 കിലോഗ്രാം ആണെങ്കിൽ ഓരോരുത്തരുടേയും ഭാരമെത്ര?

രാജുവിന്റെ അധികമുള്ള ഭാരം, 10 കിലോഗ്രാം രണ്ടുപേരുടെയും മൊത്തം ഭാരമായ 50ൽ നിന്നും കുറയ്ക്കുക. 40 കിട്ടും. ഇതിന്റെ പകുതി 20 കിലോഗ്രാം ആണ് രാധയുടെ ഭാരം. രാജുവിന്റേത് ഇതിനേക്കാൾ 10 കൂടുതൽ.

അതായത്,

$20 + 10 = 30$ കിലോഗ്രാം.

അക്ഷരഗണിതമുപയോഗിച്ചും നമുക്ക് ഈ കണക്ക് ചെയ്യാം.

രാധയുടെ ഭാരം x എന്നെടുക്കുക,

രാജുവിന്റെ ഭാരം $= x + 10$

രണ്ടുപേരുടെയും ഭാരങ്ങളുടെ തുക $= 50$

അതായത്,

$$x + x + 10 = 50$$

$$2x + 10 = 50$$

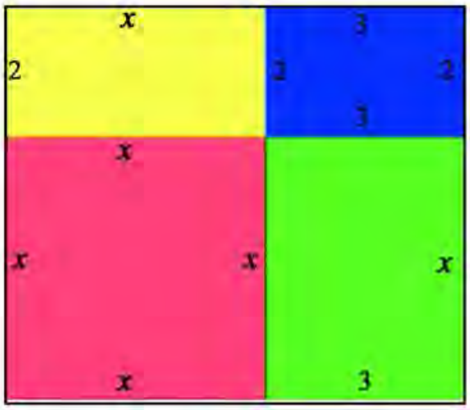
$$2x = 50 - 10 = 40$$

$$x = 20$$

രാധയ്ക്ക് 20 കിലോഗ്രാമും രാജുവിന് 20 + 10 = 30 കിലോഗ്രാമും ഭാരമുണ്ടാകും.

ഇത്തരത്തിൽ അക്ഷരങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ചില പ്രശ്നങ്ങൾ നമുക്ക് എഴുതി നോക്കാം.

1. ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ n ആയാൽ തൊട്ടടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യയും തൊട്ടു മുൻപുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യയും എഴുതുക.
2. m ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാൽ അതിന്റെ 4 മടങ്ങ് എഴുതുക.
3. x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാൽ അതിന്റെ മൂന്നിലൊന്ന് എഴുതുക.
4. കലണ്ടറിലെ ഒരു കളത്തിലെ സംഖ്യയെ x എന്ന അക്ഷരമായെടുത്ത്
   (a) തൊട്ടു വലതുഭാഗത്തെ കളത്തിലെ സംഖ്യ എഴുതുക.
   (b) തൊട്ടു താഴത്തെ കളത്തിലെ സംഖ്യ എഴുതുക.
5. ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ മൂന്ന് മടങ്ങിന്റെയും തുക 8 ആണ് എന്നത് ഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതുക.
6. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരുവശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ ആയാൽ അതിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്റർ എന്ന് എഴുതുക.
7. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം ശ്രദ്ധിക്കുക.



   (a) ചുവപ്പ് സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക
   (b) പച്ച ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(c) മഞ്ഞ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(d) നീല ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(e) നാല് ചതുരങ്ങളും ഉൾപ്പെടുന്ന വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

കലണ്ടർ സൂത്രങ്ങൾ

സരോജിനി സാക്ഷരതാ ക്ലാസിൽ വന്നത് ഒരു കലണ്ടർ സൂത്രവുമായിട്ടാണ്. കലണ്ടറിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള 4 കളങ്ങളിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക പറഞ്ഞാൽ ആ സംഖ്യകൾ പറയാമെന്നായിരുന്നു സരോജിനിയുടെ വാദം. സംഖ്യകൾ കാണുന്നതിന് നമ്മുടെ ഗണിതഭാഷ എങ്ങനെ പ്രയോജനപ്പെടുന്നുവെന്ന് നമുക്ക് നോക്കാം.

നാല് കളങ്ങളിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ അതിന് വലതുവശത്തെ സംഖ്യ എങ്ങനെ എഴുതാം?

x എന്നെടുത്തതിന് തൊട്ടുതാഴെയുള്ള സംഖ്യയോ?

ഇതിനു വലതുവശത്തുള്ള സംഖ്യ എങ്ങനെ എഴുതാം?

ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ നാല് സംഖ്യകളും കളങ്ങളിൽ എഴുതിനോക്കൂ.

x	$x+1$
$x+7$	$x+8$

ആദ്യ വരിയിൽ എഴുതിയതിന്റെ തുക എത്രയാണ്?

$$x + x + 1 = 2x + 1$$

ഇതുപോലെ രണ്ടാം വരിയുടെ തുകയോ?

$x + 7 + x + 8 = 2x + 15$ എന്നു കിട്ടും.

4 കളങ്ങളിലെയും ആകെ തുക $= 2x + 1 + 2x + 15$

$= 4x + 16$ എന്നു കിട്ടും.

എടുക്കുന്ന സംഖ്യകൾ കലണ്ടറിൽ എവിടെ ആയാലും അടുത്തടത്ത നാലു കളങ്ങളുടെ തുകയിൽ മാറ്റമില്ല എന്നത് വ്യക്തമാണല്ലോ. സരോജിനി ഈ പ്രശ്നം ക്ലാസ്സിൽ അവതരിപ്പിച്ചപ്പോൾ നാരായണൻ മനസ്സിൽ കണ്ട സംഖ്യകളുടെ തുക 60 ആയിരുന്നു.

ഈ പ്രശ്നത്തെ നമ്മുടെ ഗണിതഭാഷയിലൊന്നെഴുതി നോക്കാം.

$$4x + 16 = 60$$

$$4x = 60 - 16$$

$$4x = 44$$

$$x = \frac{44}{4} = 11$$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ കളങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ എഴുതാമല്ലോ.

11	**12**
18	**19**

ഇതുപോലെ 4 കളങ്ങളിലെ തുക 104 ആണെങ്കിൽ ഇപ്പോൾ ചെയ്ത പോലെ കളങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ.

ഇതുവരെ നാം കണ്ട ഗണിതഭാഷയിലെഴുതിയ $4x + 16 = 60$, $20 + 10 = 30$ പോലെയുള്ള ഗണിതവാക്യങ്ങളെല്ലാം തന്നെ സമചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചെഴുതിയിട്ടുള്ളതാണ്. ഇത്തരം ഗണിതവാക്യങ്ങളെ നാം **സമവാക്യങ്ങൾ** എന്നുപറയുന്നു.

ചെയ്തുനോക്കാം

1) ശാലിനി കൊയ്ത നെൽക്കറ്റകളുടെ എണ്ണം തങ്കം കൊയ്ത നെൽക്കറ്റകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങിനേക്കാൾ ഒന്നു കൂടുതലാണ്. ശാലിനി 37 കറ്റകൾ കൊയ്തപ്പോൾ തങ്കം എത്ര കറ്റകൾ കൊയ്തു?

2) തൊഴിലുറപ്പ് പദ്ധതിയിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന 8 പേർക്ക് കൂടി ലഭിച്ച കൂലിയുടെ കൂടെ 40 രൂപ കൂടി കിട്ടിയിരുന്നെങ്കിൽ 2200 രൂപ ആകുമായിരുന്നു. എങ്കിൽ ഒരാൾക്ക് ലഭിച്ച കൂലി എത്ര?

3) കൃഷ്ണന്റെ വാഴത്തോട്ടത്തിൽ 47 വാഴകൾ ഉണ്ട്. ഇത് രവീന്ദ്രന്റെ തോട്ടത്തിലുള്ള വാഴകളുടെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗത്തേക്കാൾ ഒന്ന് കുറവാണ്. എങ്കിൽ രവീന്ദ്രന്റെ തോട്ടത്തിൽ എത്ര വാഴകളുണ്ട്?

രണ്ട് അക്ഷരങ്ങൾ

സ്കൂൾ തുറക്കുന്നതിന് മുൻപായി, ബാബു കടയിൽ പോയി മകനുവേണ്ടി ഒരു കുടയും ഒരു ബാഗും വാങ്ങി. ആകെ 800 രൂപ ചെലവായി. കുടയുടെ വിലയേക്കാൾ 450 രൂപ കൂടുതലാണ് ബാഗിന് വില. എങ്കിൽ ഓരോന്നിന്റെയും വിലയെത്രയെന്നു കണക്കാക്കാമോ?

കുട, ബാഗ് എന്നീ രണ്ട് സാധനങ്ങളുടെ വിലയാണല്ലോ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. റഹീമിന്റെയും സഹോദരന്റെയും പ്രായം കണ്ടുപിടിച്ച പോലെ x ഉപയോഗിച്ച് ഇതും കണ്ടുപിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കാവുന്നതാണ്.

മറ്റൊരു രീതി ആയാലോ?

ബാഗിന്റെ വില x എന്നും കുടയുടെ വില y എന്നും എടുത്താൽ, ചോദ്യത്തിന്റെ ആദ്യ ഭാഗത്തു നിന്നും $x + y = 800$ എന്നും,

ചോദ്യത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ ഭാഗത്തുനിന്നും $x - y = 450$ എന്നും എഴുതാമല്ലോ.

മുൻപ് കണ്ടതിൽനിന്നും വ്യത്യസ്തമായി ഈ സമവാക്യങ്ങളിൽ x, y എന്നീ രണ്ട് അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. നമുക്ക് പരിചയമുള്ള പോലെ ഒറ്റ അക്ഷരം മാത്രമുള്ള സമവാക്യമാക്കി ഇതിനെ മാറ്റാൻ പറ്റുമോ എന്നു നോക്കാം. ഒന്നാമത്തെ സമവാക്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ള x തന്നെയാണല്ലോ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലും വരുന്നത്. അതിനാൽ x ന് തുല്യമായ $y + 450$ ഉപയോഗിച്ച് ഒന്നാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ x നെ മാറ്റിയാലോ? അപ്പോൾ

$x + y = 800$ എന്നത്

$(y + 450) + y = 800$ എന്നായി മാറില്ലേ?

അതായത് $2y + 450 = 800$ എന്നെഴുതാം.

ഇതിൽ നിന്ന് $2y = 800 - 450$ എന്നും

$2y = 350$ എന്നുമെഴുതാം. ഇതിൽനിന്ന് $y = 175$ എന്ന് കിട്ടുമല്ലോ. അതായത് കുടയുടെ വില 175 രൂപയാണെന്ന് മനസ്സിലായി. ഈ വില ഉപയോഗിച്ച് മനക്കണക്കായിത്തന്നെ ബാഗിന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. ബാഗിന് കുടയേക്കാൾ 450 രൂപ കൂടുതലാണ്.

അപ്പോൾ ബാഗിന്റെ വില $= 175 + 450$

$= 625$ രൂപ

ഇവിടെ ചെയ്ത ക്രിയകൾ പരിശോധിച്ചാൽ ആകെ ചെലവായ 800 രൂപയിൽ നിന്ന് 450 കുറച്ചുകിട്ടുന്ന 350 ന്റെ പകുതിയായ 175 രൂപയാണ് കുടയുടെ വില. ഇതിനോട് 450 കൂട്ടിയാൽ ബാഗിന്റെ വിലയായ 625 രൂപ കിട്ടും.

ഇതുപോലെ മറ്റൊരു പ്രശ്നം നോക്കാം.

ആഴ്ചച്ചന്തയിൽനിന്ന് 2 കോഴിക്കുഞ്ഞുങ്ങളേയും 2 താറാവിൻ കുഞ്ഞുങ്ങളേയും വാങ്ങാൻ രമക്ക് 140 രൂപ ചിലവായി. അതേ ആഴ്ചച്ചന്തയിൽ നിന്ന് അതേ വിലയുള്ള 4 കോഴിക്കുഞ്ഞുങ്ങളേയും 5 താറാവിൻ കുഞ്ഞുങ്ങളേയും വാങ്ങാൻ സുമയ്ക്ക് 320 രൂപയാണ് ചിലവായത്. എന്നാൽ ഒരു കോഴിക്കുഞ്ഞിന്റെയും ഒരു താറാവിൻകുഞ്ഞിന്റെയും വിലയെത്ര വീതം?

2 കോഴിക്കുഞ്ഞുങ്ങളുടെയും 2 താറാവിൻകുഞ്ഞുങ്ങളുടെയും വില 140 രൂപയാണ്. അതായത്, 1 കോഴിക്കുഞ്ഞിനും 1 താറാവിൻകുഞ്ഞിനും കൂടി 70 രൂപ വില വരും. സുമ 4 കോഴിക്കുഞ്ഞുങ്ങളെയും 4 താറാവിൻകുഞ്ഞുങ്ങളെയുമാണ്

വാങ്ങിയിരുന്നതെങ്കിൽ, $4\times 70 = 280$ രൂപയാകുമായിരുന്നു. അപ്പോൾ സുമ അധികം കൊടുത്ത $320 - 280 = 40$ രൂപ ഒരു താറാവിൻകുഞ്ഞിന്റെ വിലയാണ്. ഇനി കോഴിക്കുഞ്ഞിന്റെ വില കാണാമല്ലോ? സമവാക്യമുപയോഗിച്ച് ഇതെങ്ങനെ ചെയ്യാമെന്ന് നോക്കാം.

ഒരു കോഴിക്കുഞ്ഞിന്റെ വില x എന്നും ഒരു താറാവിൻകുഞ്ഞിന്റെ വില y എന്നുമെടുത്താൽ രമ മുടക്കിയ 140 രൂപയെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$2x + 2y = 140$$

അപ്പോൾ $\quad 4x + 4y = 280$

$4x + 4y$ യും $4x + 5y$ യും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം y ആണല്ലോ.

ഇത് $320 - 280 = 40$ ആണ്.

അതായത് $y = 40$, $2x + 2y = 140$ ൽനിന്ന് $x + y = 70$ എന്ന് കിട്ടുമല്ലോ.

$y = 40$ ആണെങ്കിൽ $x = 30$

അതായത് ഒരു കോഴിക്കുഞ്ഞിന് 30 രൂപയും, ഒരു താറാവിൻകുഞ്ഞിന് 40 രൂപയുമാണ് വില.

ചില്ലറയല്ലാത്ത ഒരു ചില്ലറക്കണക്ക്

200 രൂപ ചില്ലറ മാറ്റിയപ്പോൾ 10 രൂപ നോട്ടുകളും 5 രൂപ നോട്ടുകളുമാണ് കിട്ടിയത്. ആകെ 28 നോട്ടുകളുണ്ടായിരുന്നെങ്കിൽ എത്ര 10 രൂപ നോട്ടുകളും എത്ര 5 രൂപ നോട്ടുകളും ഉണ്ടെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

10 രൂപ നോട്ടുകളുടെ എണ്ണം x എന്നും 5 രൂപ നോട്ടുകളുടെ എണ്ണം y എന്നും എടുക്കാം.

ആകെ നോട്ടുകളുടെ എണ്ണം 28 ആയതുകൊണ്ട്

$x + y = 28$ എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ $10x + 10y = 280$

അതുപോലെ ആകെ x എണ്ണം 10 രൂപയും y എണ്ണം 5 രൂപയും കൂടി 200 രൂപയാകും.

അതായത്, $10x + 5y = 200$,

$10x + 10y$ ഉം, $10x + 5y$ ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $5y$ ആണ്. ഇത് $280 - 200 = 80$ ആണ്.

അതായത്,

$$5y = 280 - 200 = 80$$

അപ്പോൾ $y = \frac{80}{5} = 16$

5 രൂപ നോട്ടുകളുടെ എണ്ണം = 16

10 രൂപ നോട്ടുകളുടെ എണ്ണം = 12

ഇത് മനക്കണക്കായി ചെയ്തുനോക്കൂ.

ചെയ്തുനോക്കാം

- ഒരു കടയിൽ ഒരു പുസ്തകത്തിനും ഒരു പേനയ്ക്കും കൂടി 18 രൂപയാണ് വില. അതേ വിലയുള്ള 2 പുസ്തകവും ഒരു പേനയും കൂടി വാങ്ങിയപ്പോൾ 28 രൂപ ചിലവായി. എങ്കിൽ ഒരു പേനയുടെയും ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെയും വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

- രാജുവിന്റെ കൈവശം രണ്ട് പെട്ടികളുണ്ട്. ഒരു ത്രാസിൽ രണ്ട് പെട്ടികളും കൂടി വച്ച് തൂക്കിയപ്പോൾ 50 കിലോഗ്രാം ഭാരം കിട്ടി. ത്രാസിന്റെ രണ്ട് തട്ടുകളിലായി ഈ പെട്ടികൾ വച്ച് തൂക്കിയപ്പോൾ ചെറിയ പെട്ടിയുടെ കൂടെ 10 കിലോഗ്രാമിന്റെ കട്ടി കൂടി വച്ചപ്പോൾ ത്രാസിന്റെ തട്ടുകൾ ഒപ്പമായി. എങ്കിൽ ഓരോ പെട്ടിയുടെയും ഭാരമെത്രയായിരിക്കും?

- 2 കിലോഗ്രാം ആപ്പിളിനും 3 കിലോഗ്രാം ഓറഞ്ചിനും കൂടി 360 രൂപ വിലയായി. 4 കിലോഗ്രാം ആപ്പിളിനും 2 കിലോഗ്രാം ഓറഞ്ചിനും കൂടി 480 രൂപ വിലയായി. എങ്കിൽ ആപ്പിളിനും ഓറഞ്ചിനും ഓരോ കിലോഗ്രാമിന് എത്ര രൂപ വീതമാണ് വില?

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം കാണുന്നതിന് ആ സംഖ്യയെ അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചാൽ മതിയല്ലോ. അതിനാൽ 5 ന്റെ വർഗം $5 \times 5 = 25$ ആണ്. ഇതിനെ $5^2 = 25$ എന്നു എഴുതാം. തിരിച്ച് പറഞ്ഞാലോ? 25 ന്റെ വർഗമൂലമാണ് 5 എന്ന് പറയാം. ഇതേപോലെ 12 ന്റെ വർഗം $12 \times 12 = 144$. 144 ന്റെ വർഗമൂലമാണ് 12. 64 ന്റെ വർഗമൂലം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം? ഒരു സംഖ്യയെ അതേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ 64 കിട്ടണം. അങ്ങനെയുള്ള ഒരു സംഖ്യ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ 64 ന്റെ വർഗമൂലമായി. $8 \times 8 = 64$ ആണെന്ന് നമുക്കറിയാമല്ലോ. അപ്പോൾ 64 ന്റെ വർഗമൂലമാണ് 8.

ചെയ്തുനോക്കാം

വർഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കാം

1) 25 2) 625 3) 256

4) 196 5) 81 6) 400

താഴെ പറയുന്ന പ്രശ്നം നോക്കിയാലോ?

സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു തോട്ടത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 400 ചതുരശ്ര മീറ്റർ ആയാൽ തോട്ടത്തിന്റെ ഒരുവശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?

സമചതുരത്തിന്റെ ഒരുവശത്തിന്റെ നീളം x ആയാൽ അതിന്റെ പരപ്പളവിനെ x^2 എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ $x^2 = 400$ ച.മീറ്റർ ആണ്.

ഇതിൽനിന്ന് നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ $x = 20$ മീറ്റർ എന്നെഴുതാം. അതായത് ഒരുവശത്തിന്റെ നീളം 20 മീറ്റർ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഇതുപോലെ മറ്റൊരു പ്രശ്നം പരിഗണിക്കാം.

ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിന്റെ 3 മടങ്ങ് 147 ആണ്. എങ്കിൽ സംഖ്യ എത്ര?

സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിന്റെ 3 മടങ്ങാണ് 147.
അതായത്,

$$3x^2 = 147$$

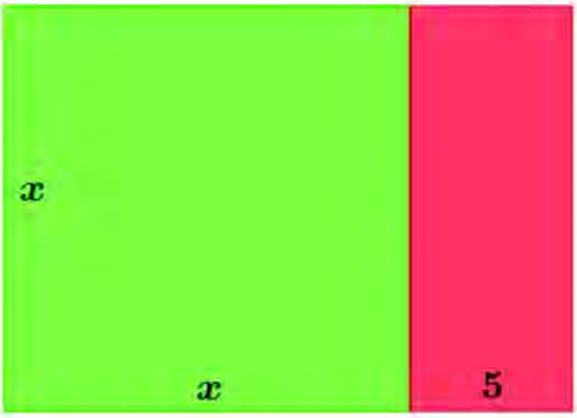
$$x^2 = \frac{147}{3}$$

$$= 49$$

$$x = 7$$

ഘടകരൂപം

ചിത്രത്തിലെ വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ഒരു സമചതുരത്തിന്റെയും ചെറിയ ഒരു ചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണ്.



വലിയ ചതുരത്തിന്റെ നീളം $(x + 5)$ യൂണിറ്റും വീതി x യൂണിറ്റും ആണല്ലോ.
അതിനാൽ പരപ്പളവ് = $x(x + 5)$

ചിത്രത്തിലെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = x^2

ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = $5x$

അതിനാൽ വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് + ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

അപ്പോൾ $x(x + 5) = x^2 + 5x$ എന്ന് പറയാം. ഇവിടെ $x^2 + 5x$ നെ x ന്റെയും $(x + 5)$ ന്റെയും ഗുണനഫലമായിട്ടാണ് എഴുതിയിട്ടുള്ളത്. അതുകൊണ്ട് $x^2 + 5x$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് x, $(x + 5)$ എന്നുപറയാം.

ഇതുപോലെ,

$$y^2 - 3y = y(y - 3)$$

$$2a^2 + 7a = a(2a + 7)$$

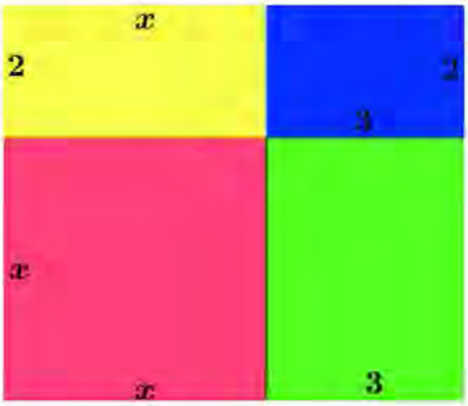
$$3x^2 + 12x = 3x(x + 4)$$

$$m^2 + 2m = m(m + 2)$$

$$7x^2 + 21x = 7x(x + 3)$$ എന്നെഴുതാം.

ഇനി മറ്റൊരു പ്രശ്നം പരിഗണിക്കാം.

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരുവശം 3 സെന്റിമീറ്ററും മറ്റേവശം 2 സെന്റിമീറ്ററും വർദ്ധിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ഒരു പുതിയ ചതുരം ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയായിരിക്കുമെന്ന് നോക്കാം.



വലിയ ചതുരത്തെ 4 ഭാഗങ്ങളാക്കിയത് ചിത്രത്തിൽ കാണാം. ഈ ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണല്ലോ വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്	$= x \times x = x^2$
പച്ച ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്	$= 3 \times x = 3x$
മഞ്ഞ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്	$= 2 \times x = 2x$
നീല ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്	$= 3 \times 2 = 6$
വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്	$= x^2 + 3x + 2x + 6$
	$= x^2 + 5x + 6$
വലിയ ചതുരത്തിന്റെ നീളം	$= (x + 3)$
വലിയ ചതുരത്തിന്റെ വീതി	$= (x + 2)$
വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്	$= (x + 3)\ (x + 2)$

വലിയ ചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു വിധത്തിൽ കണ്ടെത്തിയ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിൽ തുല്യമാകണമല്ലോ.

അതായത് $x^2 + 5x + 6$ എന്ന അളവിനെ തന്നെയാണ് $(x + 3)\ (x + 2)$ എന്ന അളവും സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

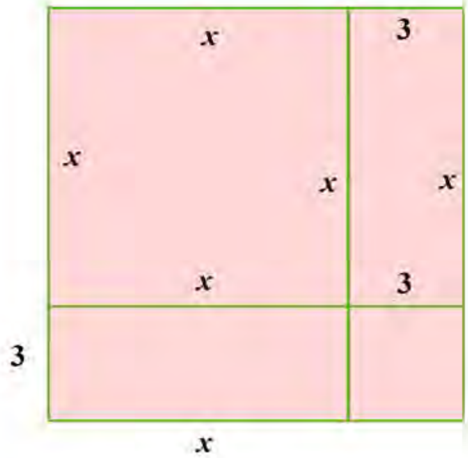
അതിനാൽ $x^2 + 5x + 6 = (x+3)\ (x+2)$ എന്നെഴുതാം. ഇത് ഒരു രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യമാണ്.

$x^2 + 5x + 6$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് $(x+3)$, $(x+2)$ എന്നും പറയാം.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, $(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab$

സമചതുരത്തിന്റെ എല്ലാവശങ്ങളുടെയും അളവ് ഒരുപോലെ 3 യൂണിറ്റ് വർധിപ്പിച്ചാലോ?

പുതിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $(x+3) \times (x+3) = (x+3)^2$ ആയിരിക്കും.



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഇത്

$x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$ നോട് തുല്യമായിരിക്കും.

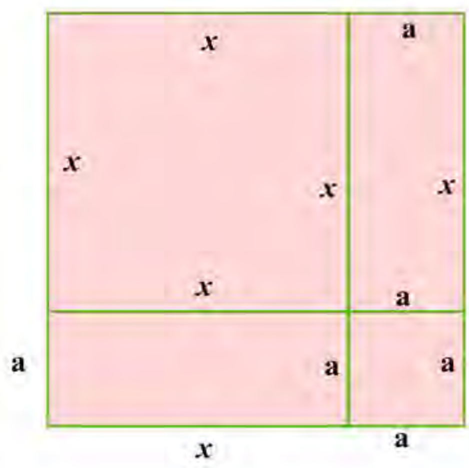
അപ്പോൾ $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

$x^2 + 6x + 9$ ന്റെ ആവർത്തിച്ചുവരുന്ന ഘടകമാണ് $(x+3)$.

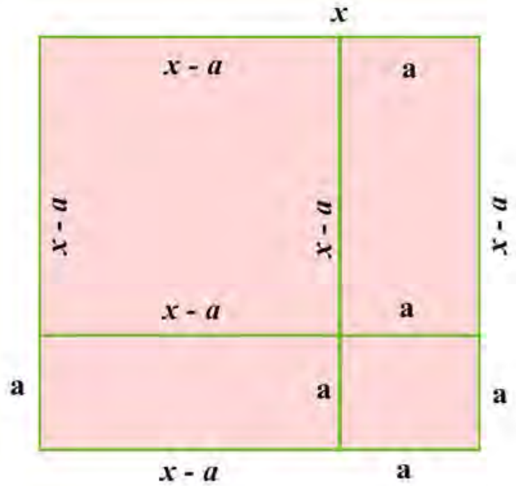
പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അളവ് a യൂണിറ്റാണ് വർധിപ്പിക്കുന്നതെങ്കിൽ

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

എന്ന രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യം കിട്ടും.



x വശങ്ങളുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അളവ് a യൂണിറ്റ് കുറയ്ക്കുകയാണെങ്കിലോ?



വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$x^2 = (x-a)^2 + a(x-a) + a(x-a) + a^2$$

$$= (x-a)^2 + ax-a^2 + ax-a^2 + a^2$$

$$= (x-a)^2 + 2ax-a^2$$

രണ്ടു ഭാഗത്തും $-2ax + a^2$ കൂട്ടിയാൽ,

$$x^2-2ax + a^2 = (x-a)^2 + 2ax-a^2-2ax + a^2$$

$$= (x-a)^2$$

$(x-a)^2 = x^2 -2ax + a^2$ എന്നതും ഒരു രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യമാണ്.

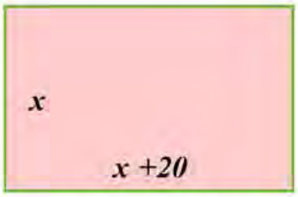
$(x-a)$ എന്ന പദം $x^2-2ax + a^2$ ന്റെ ആവർത്തിച്ചുവരുന്ന ഘടകമാണ്.

ഘടകങ്ങളാക്കി സമവാക്യരൂപത്തിൽ എഴുതുക

- $m^2 + 8m$
- $a^2 -4a$
- $3x^2 + 5x$
- $2a^2 + 10a$
- $x^2 + 2x + 1$
- $x^2-2x + 1$
- $x^2 + x + \frac{1}{4}$
- $x^2 + 10x + 25$

ഈ സമവാക്യങ്ങളുപയോഗിച്ച് ചില ഗണിതപ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്.

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തെക്കാൾ 20 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?



ചെറിയവശം x ആയാൽ, വലിയവശം $x + 20$ ആകും.

$$\text{പരപ്പളവ്} = x(x+20) = 224$$

$$x^2 + 20x = 224$$

ഇതിനെ $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$ എന്ന സമവാക്യരൂപത്തിലാക്കാൻ 20 ന്റെ പകുതി 10ന്റെ വർഗം രണ്ടു ഭാഗത്തും കൂട്ടിയാൽ മതി. അപ്പോൾ,

$$x^2 + 20x + 100 = 224 + 100 = 324$$

$$(x+10)^2 = 324$$

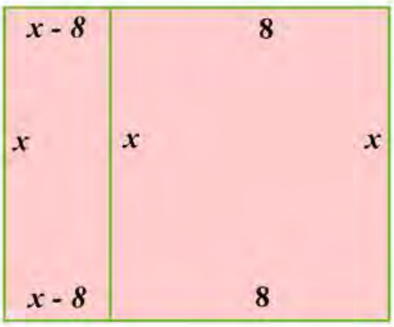
$$x+10 = \sqrt{324} = 18$$

$$x = 8$$

ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 8 മീറ്ററും 28 മീറ്ററുമായിരിക്കും.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം കൂടി നോക്കാം

രാജന്റെ കൈവശം സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു സ്ഥലം ഉണ്ടായിരുന്നു. പണത്തിന് ആവശ്യം വന്നപ്പോൾ ഒരു ഭാഗത്തായി 8 മീറ്റർ വീതിയിൽ സ്ഥലം വിറ്റു. ഇപ്പോൾ 20 ചതുരശ്രമീറ്റർ സ്ഥലമുണ്ട്. വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ എന്തായിരിക്കും?



സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുക്കാം.

8 മീറ്റർ വീതിയിൽ വിറ്റതിനുശേഷം ബാക്കിവന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വശങ്ങൾ x, $x-8$ എന്നിവയായിരിക്കും.

ഇപ്പോഴത്തെ സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യത്തിലെഴുതാം.

$$x(x-8) = 20$$

$$x^2-8x = 20$$

ഈ സമവാക്യത്തെ $(x-a)^2 = x^2-2ax + a^2$ എന്ന സമവാക്യരൂപത്തിലെഴുതാൻ 8 ന്റെ പകുതി 4 ന്റെ വർഗമായ 16 രണ്ടു ഭാഗത്തും കൂട്ടണം.

$$x^2-8x + 16 = 20 + 16$$

$$(x-4)^2 = 36$$

$$x-4 = 6$$

$$x = 6 + 4 = 10$$

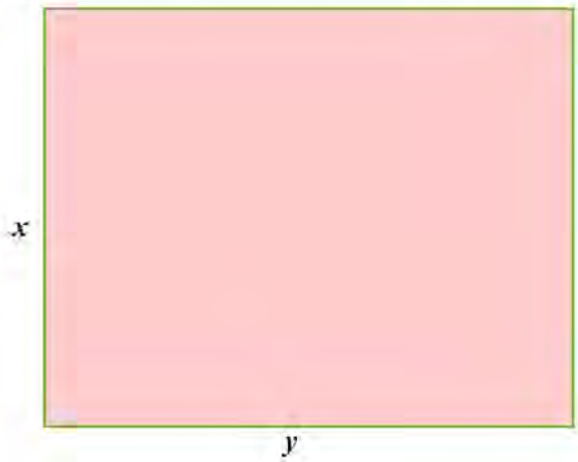
മറ്റേ വശം $x-8 = 2$

ഇപ്പോഴത്തെ സ്ഥലത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ 10 മീറ്ററും 2 മീറ്ററുമാണ്.

കുറച്ചു വ്യത്യസ്തമായ മറ്റൊരുദാഹരണം കൂടി നോക്കാം

ചതുരാകൃതിയായ ഒരു സ്ഥലത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 82 മീറ്ററും,പരപ്പളവ് 420 ചതുരശ്ര മീറ്ററുമാണ്. വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ എന്തായിരിക്കും?

സ്ഥലത്തിന്റെ ഒരുവശം x ഉം മറ്റേവശം y ആയും എടുക്കുക. ചുറ്റളവ് 82 ഉം പരപ്പളവ് 420 ഉം ആണല്ലോ.



$$\text{ചുറ്റളവ്} = 2(x+y) = 82$$

$$x+y = 41$$

$$y = 41-x$$

$$\text{പരപ്പളവ്} = xy = 420$$

$$x(41-x) = 420$$

$$41x-x^2 = 420$$

$41x$ ൽനിന്ന് x^2 കുറച്ചാൽ 420 കിട്ടുമെങ്കിൽ, x^2 ൽനിന്ന് $41x$ കുറച്ചാൽ -420 കിട്ടും.

$x^2-41x=-420$

ഈ സമവാക്യത്തെ $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ എന്ന സമവാക്യരൂപത്തിലെഴുതാൻ, $\frac{41}{2}$ ന്റെ വർഗമായ $\frac{1681}{4}$ രണ്ടു ഭാഗത്തും കൂട്ടണം.

$$x^2-41x+\frac{1681}{4} = -420+\frac{1681}{4} = \frac{-1680+1681}{4}$$

$$\left(x-\frac{41}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x-\frac{41}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{41}{2}+\frac{1}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$y = 41-21 = 20$$

വശങ്ങൾ 21 മീറ്ററും 20 മീറ്ററുമായിരിക്കും.

ചെയ്തുനോക്കാം

- ചതുരാകൃതിയായ ഒരു കൃഷിസ്ഥലത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 32 മീറ്ററും പരപ്പളവ് 60 ചതുരശ്രമീറ്ററുമാണ്. സ്ഥലത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ കാണുക.
- സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള രവിയുടെ പച്ചക്കറിത്തോട്ടത്തോടു ചേർന്ന് ബഷീറിന്റെ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള തോട്ടമുണ്ട്. ബഷീറിന്റെ തോട്ടത്തിന് 6 മീറ്റർ വീതിയും രവിയുടെ തോട്ടത്തിന്റെ വശം നീളമായും വരും. രണ്ട് തോട്ടങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകളുടെ തുക 391 ചതുരശ്രമീറ്ററായാൽ ഓരോ തോട്ടത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ കാണുക.
- തുടർച്ചയായ രണ്ട് ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 168 ആയാൽ സംഖ്യകൾ ഏവ?
- ചതുരാകൃതിയായ ഒരു വയലിന്റെ പരപ്പളവ് 84 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആണ്. ഇതിന്റെ നീളം, വീതിയുടെ രണ്ട് മടങ്ങിനേക്കാൾ 2 കുറവാണ്. നീളവും വീതിയും എന്തായിരിക്കും?

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

- പ്രായോഗികപ്രശ്നങ്ങളെ അക്ഷര(ബീജ)ഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കി പരിഹാരം കാണുന്നു.
- പ്രായോഗികപ്രശ്നങ്ങളെ രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളായി രൂപീകരിക്കുന്നു. ഇവയെ ഘടകക്രിയ ചെയ്ത് പ്രശ്നപരിഹാരം കാണുന്നു.

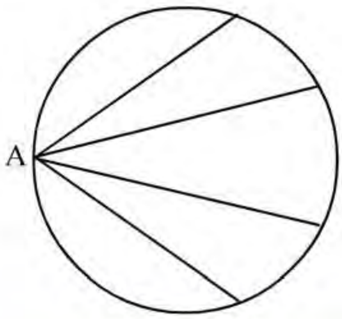
4

വൃത്തങ്ങൾ

വൃത്തം വരയ്ക്കുന്ന രീതികൾ, വൃത്തങ്ങളുടെ ആരം, വ്യാസം തുടങ്ങിയ കാര്യങ്ങൾ ഏഴാംതരത്തിൽ പഠിച്ചതാണല്ലോ. വൃത്തവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട കൂടുതൽ കാര്യങ്ങൾ നമുക്കിവിടെ ചർച്ച ചെയ്യാം.

ഞാണുകൾ

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിൽ യോജിപ്പിച്ച് വരയ്ക്കുന്ന വരയാണ് ഞാൺ. ഒരു വൃത്തത്തിന് അനേകം ഞാണുകൾ വരയ്ക്കാം. ചിത്രത്തിൽ A എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് തുടങ്ങുന്ന വ്യത്യസ്ത ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നത് കാണാമല്ലോ.



ഒരു വൃത്തത്തിന് വ്യത്യസ്ത നീളമുള്ള ഞാണുകൾ ഉണ്ടാകാമെന്ന് വ്യക്തമാണല്ലോ. ഒരു വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിപ്പമുള്ള ഞാണുകളാണ് അതിന്റെ വ്യാസങ്ങൾ.

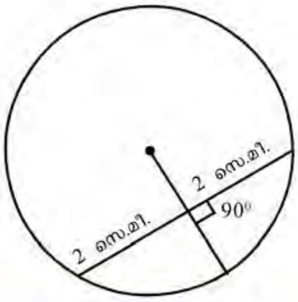
6 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തത്തിന് 5 സെന്റിമീറ്റർ, 10 സെന്റിമീറ്റർ, 12 സെന്റിമീറ്റർ വീതം നീളമുള്ള ഞാണുകൾ വരയ്ക്കുക. ഇതിന് 13 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഞാൺ വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ? എന്തുകൊണ്ട്?

ജിയോജിബ്ര സോഫ്റ്റ് വെയറിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ വിവിധ ടൂളുകളുണ്ട്. Circle with center and radius ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ബിന്ദുവിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ വരുന്ന ജാലകത്തിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം നൽകി വൃത്തം വരയ്ക്കാം. A എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ആരം 3 ആകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം. അതിൽ B, C എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ഒരു ഞാൺ വരയ്ക്കുക. (Segment ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). Distance or length ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇതിന്റെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. C എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. ഞാണിന്റെ പരമാവധി നീളം എത്രയാണ്?

ഞാണിന്റെ ലംബസമഭാജി

ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ യോജിപ്പിച്ച് ഞാൺ വരയ്ക്കുക. ഞാണിന്റെ ലംബസമഭാജി വരച്ചുനോക്കൂ (Perpendiccular Bisector ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). ലംബസമഭാജി കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നില്ലേ? വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ.

ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിന് ഒരു ഞാണും വരയ്ക്കുക. ഈ ഞാണിന്റെ ലംബസമഭാജി വരച്ചുനോക്കൂ. സൗകര്യപ്രദമായ അളവിൽ ഒരു ഞാൺ വരച്ച് മധ്യബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഉദാഹരണത്തിന് 4 സെ.മീ. അളവിൽ ഞാൺ വരച്ചാൽ, അതിന്റെ ഒരു ഭാഗത്തുനിന്നും 2 സെ.മീ. അകത്തിലാവും മധ്യബിന്ദു. ഈ ബിന്ദുവിലൂടെ മട്ടമോ, കോൺമാപനിയോ ഉപയോഗിച്ച് ലംബം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്? മറ്റു ചില ഞാണുകൾ കൂടി വരച്ച് ലംബസമഭാജികൾ വരച്ചുനോക്കൂ. ഇവയെല്ലാം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതായി കാണാം.



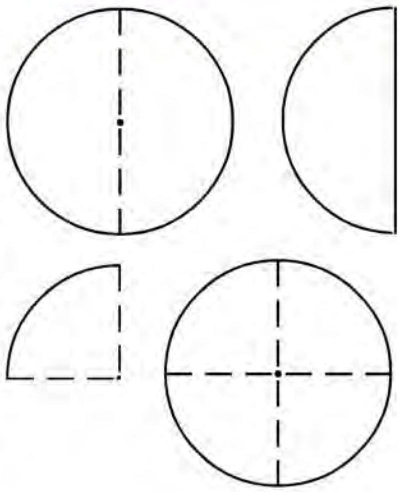
അതായത്,

> ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതൊരു ഞാണിന്റെയും ലംബസമഭാജി വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.

വൃത്തകേന്ദ്രം

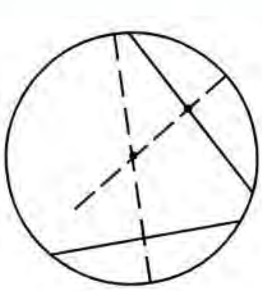
കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം? ഇതിനെ കൃത്യം രണ്ടായി മടക്കുക.

വീണ്ടും രണ്ടായി മടക്കുക. ഇനി നിവർത്തിനോക്കൂ. രണ്ടു വ്യാസങ്ങൾ കിട്ടിയില്ലേ. അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാവും.



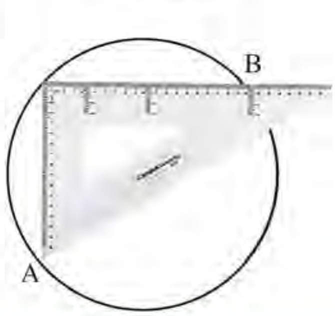
വൃത്താകൃതിയിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു മരത്തടിയുടേയോ ഒരു അടപ്പിന്റേയോ കേന്ദ്രം കാണണമെങ്കിലോ?

വ്യാസങ്ങളെല്ലാം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുമെന്നത് ഇവിടെയും ഉപയോഗിക്കാം. എന്നാലിവിടെ മടക്കി വ്യാസം കാണാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. വ്യാസം വരയ്ക്കാനായി കോമ്പസിന്റെ മുന വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ വച്ച് അതിൽനിന്നും പരമാവധി അകലത്തിൽ വൃത്തത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വ്യാസം വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഇതുപോലെ മറ്റൊരു വ്യാസം കൂടി വരയ്ക്കുക. ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു വൃത്തകേന്ദ്രമാവും.



ഞാണുകളുടെ ലംബസമഭാജികൾ കേന്ദ്രത്തിൽ കൂടി കടന്നുപോകുമല്ലോ. ഇതുപയോഗിച്ചും കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കാം.

രണ്ട് ഞാണുകളും അവയുടെ ലംബസമഭാജികളും വരയ്ക്കുക. ലംബ സമഭാജികൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമായിരിക്കുമല്ലോ.



ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ മട്ടത്തിന്റെ സഹായത്താലും കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇതിനായി ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ മട്ടമൂല വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ചേർത്തു വയ്ക്കുക.

മട്ടത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ (A, B ഇവ) അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസം ലഭിക്കും. ഇതുപോലെ മറ്റൊരു വ്യാസം കൂടി വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദു വൃത്തകേന്ദ്രമായിരിക്കും.

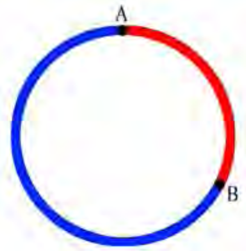
ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം കാണാൻ Mid-point or Center ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി.

ചെയ്തുനോക്കാം

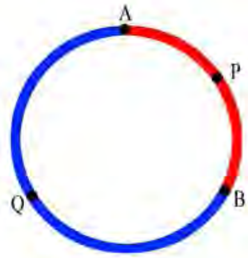
- ഒരു വലിയ അടപ്പിന്റെ കേന്ദ്രം കൃത്യമായി കണ്ടുപിടിക്കുക.
- വള ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിന്റെ കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കുക. വളയുടെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ചാപങ്ങൾ

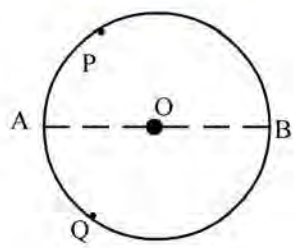
ഒരു കുപ്പിവളയുടെ പൊട്ടിയ കഷണങ്ങളാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നത്. ഇത്തരം വൃത്തഭാഗങ്ങളെ ചാപങ്ങൾ (Arcs) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.



ചിത്രത്തിൽ രണ്ട് ചാപങ്ങൾ കാണാം. ചുവന്ന നിറത്തിലുള്ളതും നീല നിറത്തിലുള്ളതും. ചുവന്ന നിറത്തിലുള്ള ചാപത്തിന്റെ മറുചാപമാണ് നീല ചാപം എന്ന് പറയാം. മറിച്ചും പറയാം, നീല നിറത്തിലുള്ള ചാപത്തിന്റെ മറുചാപമാണ് ചുവന്ന ചാപം. ഒരു ചാപവും അതിന്റെ മറുചാപവും ചേർന്നാൽ വൃത്തം പൂർണ്ണമാകും. ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ചാപത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ A, B ഇവയാണല്ലോ. അതിനാൽ ഇതിനെ ചാപം AB എന്ന് വിളിക്കാം. എന്നാൽ നീല ചാപത്തിന്റെയും അഗ്രബിന്ദുക്കൾ A, B ഇവതന്നെയാണ്. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഒരു ചാപത്തിന് പേരുകൊടുക്കാൻ ചാപത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു കൂടി അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. ചുവന്ന ചാപത്തിനെ ഇനി ചാപം APB എന്നും നീല ചാപത്തിനെ ചാപം AQB എന്നും വിളിക്കാം.

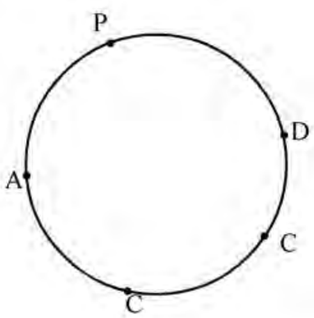


ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളാണ് A, B എന്നിവ. ചാപം APB വൃത്തത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ. അതിനാൽ ഇതിനെ ഒരു അർധവൃത്തം എന്ന് വിളിക്കാം. ചാപം AQB മറ്റൊരു അർധ വൃത്തമാണ്. അതായത് ഒരു അർധവൃത്തത്തിന്റെ ശിഷ്ട ചാപം (മറുചാപം) മറ്റൊരു അർദ്ധവൃത്തമാണ്.

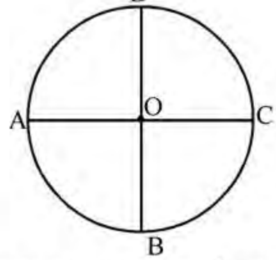


ചെയ്തുനോക്കാം

- ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽനിന്നും പരമാവധി ജോടി ചാപങ്ങളും ശിഷ്ട ചാപങ്ങളും എഴുതുക.

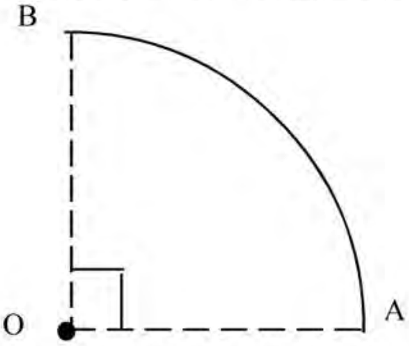


- ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിലെ അർധവൃത്തങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?



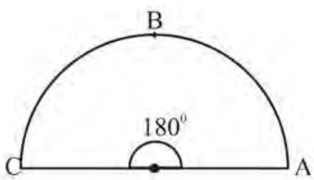
ചാപത്തിന്റെ കോൺ

ചോക്കുപയോഗിച്ച് തറയിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുകയാണ് അപ്പു.



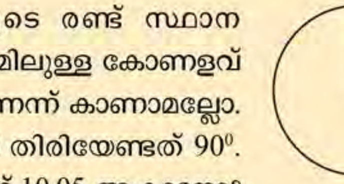
വൃത്തത്തിന്റെ കൃത്യം നാലിൽ ഒരു ഭാഗം അപ്പു പൂർത്തിയാക്കി.

അപ്പോൾ അപ്പു വരയ്ക്കാൻ തുടങ്ങിയ ബിന്ദു A യിൽ നിന്നും കൃത്യം 90^0 കറങ്ങിയാണ് B യിലെത്തുന്നത്. അതിനാൽ ചിത്രത്തിലെ AB എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ 90^0 ആണെന്നു പറയാം. വൃത്തത്തിന്റെ പകുതി പൂർത്തിയാകുമ്പോഴോ?



തിരിവിന്റെ അളവ്

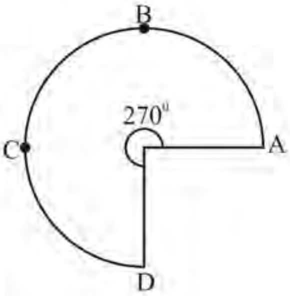
ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ. ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ സമയം 10 മണി. രണ്ടാമത്തേതിൽ 10.15.



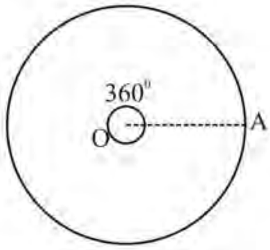
10 ൽനിന്ന് 10.15 ആവാൻ മിനിറ്റുസൂചി എത്ര തിരിയണം.

സൂചിയുടെ രണ്ട് സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് 90^0 ആണെന്ന് കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ തിരിയേണ്ടത് 90^0. 10 ൽനിന്ന് 10.05 ആകാനോ? 10.20 ആകണമെങ്കിലോ?

A യിൽനിന്നും 180^0 കറങ്ങിയാണ് C യിൽ എത്തുക. അപ്പോൾ അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 180^0 ആണ്. ഒരു 90^0 കൂടി കറങ്ങിയാലോ? അതായത് ആകെ 270^0. വൃത്തത്തിന്റെ മുക്കാൽ ഭാഗവും പൂർത്തിയായിക്കഴിഞ്ഞു. അതായത് ABD എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 270^0 ആണെന്നു പറയാം.

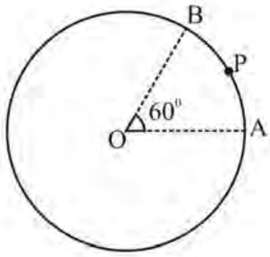


വീണ്ടും 90^0 കൂടി കറങ്ങിയാൽ, 360^0 പൂർത്തിയാക്കി തുടങ്ങിയ ബിന്ദുവിൽ തന്നെ തിരിച്ചെത്തും. വൃത്തം പൂർണ്ണമാകുകയും ചെയ്യും.



ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആറിൽ ഒരു ഭാഗത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്?

ആറിൽ ഒരുഭാഗത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 360^0 യുടെ ആറിൽ ഒന്ന് ആയിരിക്കുമല്ലോ. അതായത് 60^0. ചിത്രത്തിലെ ചാപം APB യുടെ ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്?



ആകെ 360^0 ആണല്ലോ. അതിൽ ചാപം APB യുടെ കേന്ദ്രകോൺ 60^0. അതുകൊണ്ട് ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ

$360 - 60 = 300^0$.

ചെയ്തുനോക്കാം

- ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ എട്ടിൽ ഒരുഭാഗത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്? അതിന്റെ ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെയോ?
- ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 100^0 ആണ്. ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്?

ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 36^0 ആണ്. വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചാപം? 360^0 യുടെ പത്തിലൊന്നാണല്ലോ 36. അതിനാൽ വൃത്തത്തിന്റെ പത്തിലൊരു ഭാഗമാണ് ചാപം എന്ന് പറയാം.

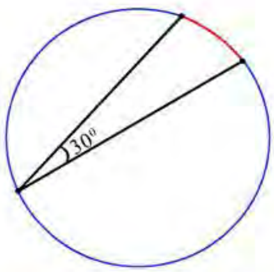
- ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 72^0 ആയാൽ ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും മറുചാപത്തിലെ കോണും

വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു വളയുടെ ചിത്രം നോക്കൂ. ഇതിന്റെ ഒരുഭാഗം ചുവന്ന നിറവും ബാക്കി ഭാഗം നീല നിറവുമാണ്. വളയുടെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചുവപ്പ് എന്ന് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം?

ചുവന്ന നിറം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ അറിഞ്ഞാൽ വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചുവന്ന നിറം എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. അതിന് കേന്ദ്രം അറിയണ്ടെ...

കേന്ദ്രത്തിന്റെ സഹായമില്ലാതെതന്നെ ഇതുകണ്ടു പിടിക്കാൻ ഒരു സൂത്രമുണ്ട്.



ചാപത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളിൽനിന്നും ശിഷ്ട ചാപത്തിന്റെ (നീല നിറം) ഒരു ബിന്ദുവിലേക്ക് ഒരു കോൺ വരയ്ക്കുക. ചിത്രത്തിൽ ഇത് 30^0 ആണ്. ശിഷ്ടചാപത്തിലെ ഏത് ബിന്ദു എടുത്ത് വരച്ചാലും കോണളവ് 30^0 തന്നെ ആയിരിക്കും.

ഈ കോണിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാവും ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോണിന്റെ അളവ്. അതായത് കേന്ദ്രകോൺ 60^0. ഇത് 360ന്റെ ആറിൽ ഒരു ഭാഗമാണല്ലോ. അപ്പോൾ ചുവന്ന നിറത്തിലുള്ള ചാപം ആകെ വൃത്തത്തിന്റെ ആറിലൊന്നായിരിക്കും. ഇവിടെ നമ്മൾ ഉപയോഗിച്ച സൂത്രത്തെ ഇങ്ങനെ പറയാം. ഒരു ചാപം അതിന്റെ ശിഷ്ടചാപത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാണ് അതിന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ.

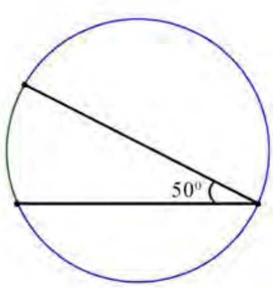
ഇത് മറിച്ചും പറയാം.

O എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ A, B, C എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. AC, BC എന്നീ വരകൾ വരച്ച് $\angle C$ അളക്കുക. (Angle ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). OA, OB എന്നീ വരകൾ വരച്ച് $\angle AOB$ യും അളക്കുക. ഈ കോണും $\angle C$ യും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? C യുടെ സ്ഥാനം ചാപത്തിലൂടെ മാറ്റി നോക്കൂ. A, B ഇവയുടെ സ്ഥാനവും മാറ്റിനോക്കൂ.

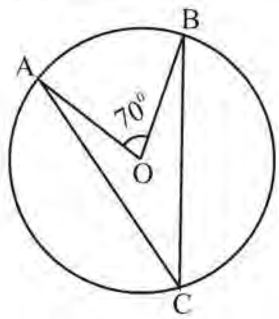
ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ് ആ ചാപം അതിന്റെ ശിഷ്ടചാപത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ.

ചെയ്തുനോക്കാം

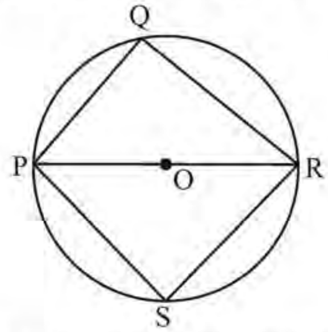
- ചിത്രത്തിലെ പച്ച നിറമുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്?



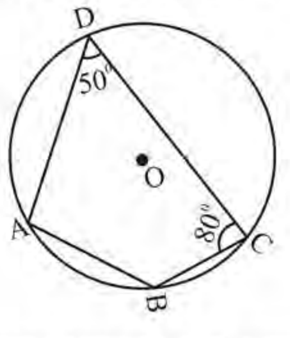
- ചിത്രത്തിലെ $\angle C$ കണ്ടുപിടിക്കുക.



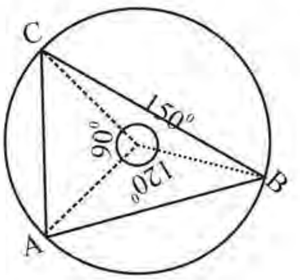
- ചാപം PQR ഒരു അർധവൃത്തമാണ്. ഇതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്? $\angle Q$, $\angle S$ ഇവ കണക്കാക്കുക. ഒരു അർധവൃത്തത്തിലെ കോണിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?



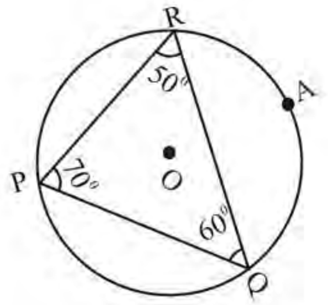
- ചാപം ADC, ചാപം ABC ഇവയുടെ കേന്ദ്രകോൺ കണ്ടുപിടിക്കുക. $\angle B$, $\angle A$ ഇവ കണക്കാക്കുക.



- ത്രികോണം ABC യുടെ കോണളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

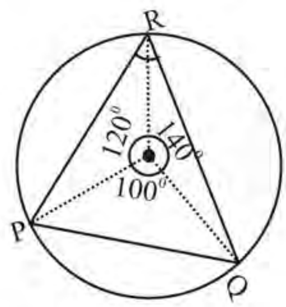


വൃത്തവും ത്രികോണവും



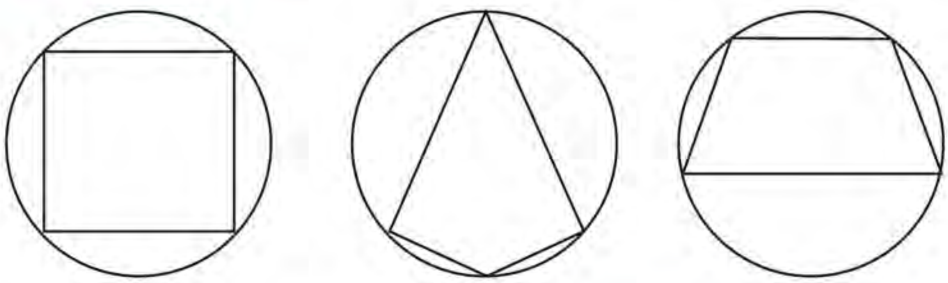
ആറ് സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

$\angle P = 70^0$ ആണല്ലോ. അതിനാൽ ചാപം QAR ന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 140^0 ആയിരിക്കും. അതുപോലെ $\angle Q$ വിന്റെ എതിർഭാഗത്തുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 120^0 യും $\angle R$ ന്റെ എതിർഭാഗത്തുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 100^0 യും ആയിരിക്കുമല്ലോ. അപ്പോൾ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതു പോലെ കേന്ദ്രത്തിൽ $140^0, 120^0, 100^0$ വീതം കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി ത്രികോണം വരയ്ക്കാം.



- 5 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ച് മൂലകൾ വൃത്തത്തിലാവുന്നതു പോലെ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം. അതിന്റെ കോണുകൾ 55^0, 60^0, 65^0 വീതം ആവണം.

വൃത്തവും ചതുർഭുജവും



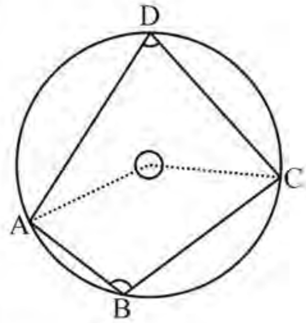
ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെയുള്ള ഡിസൈനുകൾ ചില ഗേറ്റുകളിലും ഗ്രില്ലുകളിലു മൊക്കെ കണ്ടിട്ടില്ലേ?

വൃത്തങ്ങൾക്കുള്ളിൽ വിവിധ ചതുർ ഭുജങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുകയാണ് ഇവിടെ. ഇതു പോലെ ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ഒരു സാമാന്തരികം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ? ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിനുള്ളിൽ ഒരു സാമാന്തരികം

ഒരു വൃത്തത്തിൽ നാല് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

വരയ്ക്കാൻ ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ. സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാവണേ...

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ ആ ചതുർഭുജത്തിനെ ചക്രിയചതുർഭുജമെന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.



ചക്രിയചതുർഭുജങ്ങളുടെ കോണളവുകൾക്ക് ഒരു പ്രത്യേകതയുണ്ട്.

ചിത്രത്തിൽ ചാപം ABC യുടെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ് $\angle ADC$.

അതുപോലെ, ചാപം ADCയുടെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ് $\angle ABC$.

ABC, ADC എന്നീ ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകളുടെ തുക 360^0. അതിനാൽ അവയുടെ പകുതി വീതം കൂട്ടിയാൽ 180^0.

അതായത് $\angle ADC + \angle ABC = 180^0$

അതായത്, ഒരു ചക്രിയചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർ മൂലകളിലെ കോണുകളുടെ തുക 180^0 ആയിരിക്കും.

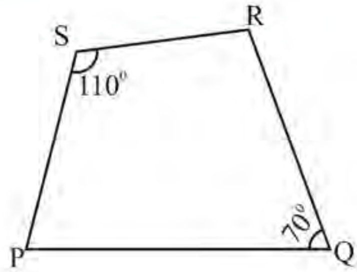
ഇത് തിരിച്ചും ശരിയാണ്.

അതായത്,

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകളുടെ തുക 180^0 ആണെങ്കിൽ അത് ഒരു ചക്രിയചതുർഭുജമായിരിക്കും.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചതുർഭുജങ്ങൾ ചക്രിയചതുർഭുജങ്ങളാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

a)

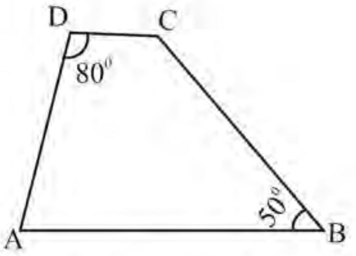


$\angle S + \angle Q = 110 + 70 = 180^0$

ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെ ആകെ തുക 360^0 ആണ്. അതിനാൽ $\angle P + \angle R = 180^0$

PQRS ഒരു ചക്രിയചതുർഭുജമാണ്.

b)



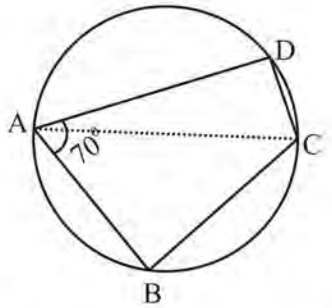
$\angle D + \angle B = 80 + 50 = 130^0$

അതിനാൽ ABCD ഒരു ചക്രിയ ചതുർഭുജമല്ല.

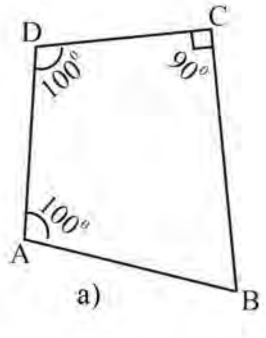
ചെയ്തുനോക്കാം

- ചിത്രത്തിൽ AC ഒരു വ്യാസമാണ്

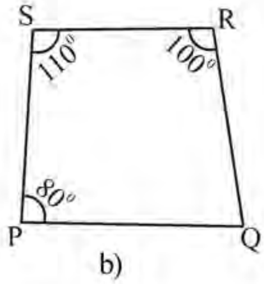
$\angle A = 70^0$ ആയാൽ $\angle B, \angle C, \angle D$ ഇവ കണക്കാക്കുക.



- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചതുർഭുജങ്ങളിൽ ചക്രിയചതുർഭുജങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

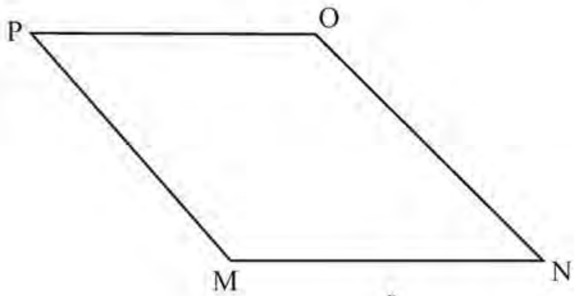


a)



b)

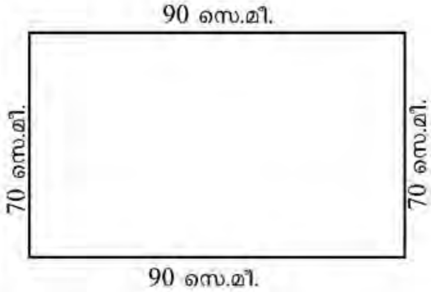
c)



d)

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്

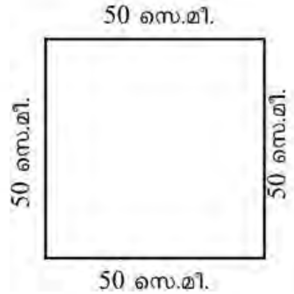
90 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 70 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ഒരു ചതുര ഫ്രെയിം നിർമ്മിക്കണം.



ഇതിനുപയോഗിക്കേണ്ട ഇരുമ്പുപട്ടയുടെ ആകെ നീളം എത്രയായിരിക്കണം?

ആകെ നീളം 90 + 70 + 90 + 70 = 320 സെന്റിമീറ്റർ എന്ന് കാണാമല്ലോ. ഈ അളവ് ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് തന്നെയല്ലേ...

ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 50 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഫ്രെയിമാണെങ്കിലോ?

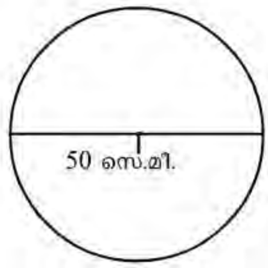


ഇവിടെയും കാണേണ്ടത് ചുറ്റളവുതന്നെ. സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് അതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങാണല്ലോ.

അപ്പോൾ പട്ടയുടെ ആകെ നീളം

$50 \times 4 = 200$ സെന്റിമീറ്റർ

വ്യാസം 50 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഫ്രെയിമാണ് നിർമിക്കേണ്ടതെങ്കിലോ?



ഇരുമ്പു പട്ടയുടെ ആകെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം?

വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ നാലുമടങ്ങാണ് സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്.

അതുപോലെ വ്യാസത്തിന്റെ നീളമറിഞ്ഞാൽ വൃത്തം തീരുമാനിക്കപ്പെടുമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും ചുറ്റളവും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ഇത് കണ്ടെത്താൻ കാർഡ്ബോർഡിൽ കുറച്ച് വൃത്തങ്ങൾ വെട്ടിയെടുത്ത് നൂലോ മറ്റോ ഉപയോഗിച്ച് ചുറ്റളവ് അളന്നെടുക്കുക. ഓരോ വൃത്തത്തിന്റേയും ചുറ്റളവിനെ അതിന്റെ വ്യാസംകൊണ്ട് ഹരിച്ചുനോക്കൂ.

ഏകദേശം മൂന്നിനോട് അടുത്ത ഒരു സംഖ്യ കിട്ടും. വളരെ കൃത്യമായും സൂക്ഷ്മമായും ചെയ്താൽ 3.1 എന്നോ 3.14 എന്നോ ഒക്കെ കിട്ടും.

അതായത് ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തെ 3.14 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ അതിന്റെ ഏകദേശ ചുറ്റളവ് കിട്ടും. കുറച്ചുകൂടി കൃത്യമായി കിട്ടണമെങ്കിൽ 3.141 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതി.

3.1415 കൊണ്ടാണ് ഗുണിക്കുന്നതെങ്കിൽ ശരിയായ ചുറ്റളവിനോട് കുറച്ചു കൂടി അടുത്ത ഒരു സംഖ്യ ലഭിക്കും.

ശരിയായ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തെ ഗുണിക്കേണ്ട സംഖ്യയെ π (പൈ) എന്ന ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. 3.14, 3.141, 3.1415 ഇവയൊക്കെ π യുടെ ഏകദേശ വിലകളാണ്. എന്നാൽ ഇതിന്റെ കൃത്യമായ വില ദശാംശ രൂപത്തിലോ ഭിന്ന സംഖ്യാരൂപത്തിലോ എഴുതാൻ കഴിയില്ല.

Circle with center and Radius ടൂളുപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. Distance or length ടൂളുപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിന്റെ മുകളിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്താൽ അതിന്റെ ചുറ്റളവ് കാണാൻ കഴിയും. ചുറ്റളവിനെ വ്യാസം കൊണ്ട് ഹരിച്ചു നോക്കൂ. വ്യത്യസ്ത വ്യാസമുള്ള വൃത്തങ്ങൾ വരച്ച്, ചുറ്റളവ് കണ്ട്, ചുറ്റളവും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്തൂ. Options - Rounding എന്ന രീതിയിൽ പോയാൽ കൂടുതൽ ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾ കാണുന്നതുപോലെ ക്രമീകരിക്കാൻ കഴിയും.

അപ്പോൾ,

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം d ആണെങ്കിൽ

$$\text{ചുറ്റളവ്} = \pi d$$

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r ആണെങ്കിൽ ചുറ്റളവ് എന്തായിരിക്കും?

ആരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണല്ലോ വ്യാസം.

അതായത് $d = 2r$

അതിനാൽ

$$\text{ചുറ്റളവ്} = 2r \times \pi = 2\pi r$$

വ്യാസം 50 സെന്റിമീറ്റർ ആയ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഫ്രെയിമിനു വേണ്ട ഇരുമ്പുപട്ടയുടെ നീളം $= 50 \times \pi$

$= 50 \times 3.14$

$= 157$ സെ.മീ.

വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു കിണറിന്റെ ആരം 1 മീറ്ററായാൽ അത് അടയ്ക്കുന്നതിനുള്ള ഇരുമ്പുവലയുടെ ചുറ്റളവ് ചുരുങ്ങിയത് എത്രയായിരിക്കും?

വട്ടിയുണ്ടാക്കുമ്പോൾ മുകളിലെ വട്ടത്തിന് ഈറ്റ മുറിക്കുന്നത് കണ്ടിട്ടുണ്ടോ? തുറന്ന ഭാഗത്തെ വ്യാസം എത്രവേണമോ അതിന്റെ മൂന്നുമടങ്ങിനേക്കാൾ കുറച്ചു കൂടുതലെടുത്താണ് മുറിക്കുന്നത്.

ആരം = 1 മീറ്റർ

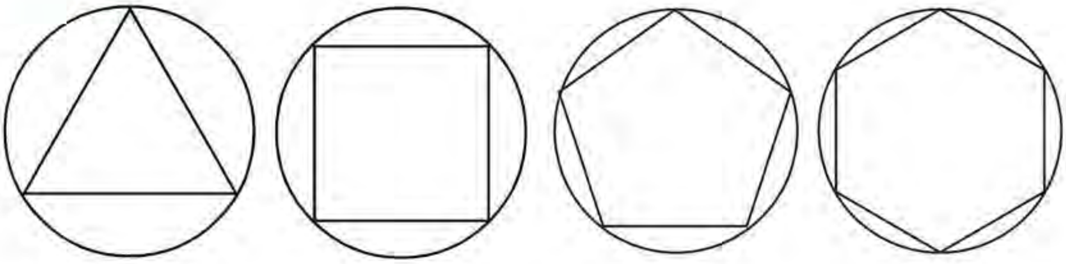
ചുറ്റളവ് $= 2\pi \times r$

$= 2 \times 3.14 \times 1 =$ 6.2 മീറ്റർ.

ചെയ്തുനോക്കാം

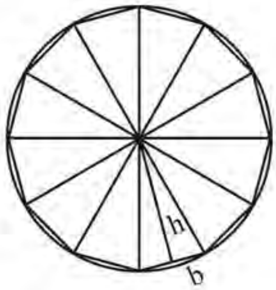
- 50 സെന്റിമീറ്റർ വ്യാസമുള്ള ഒരു ടയറും 100 സെന്റിമീറ്റർ വ്യാസമുള്ള ടയറും ഒരു വട്ടം ചുറ്റുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന നീളവ്യത്യാസമെത്രയായിരിക്കും?
- ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 9π സെന്റിമീറ്റർ ആയാൽ അതിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?
- ഗ്രില്ലിൽ പിടിപ്പിക്കാനുള്ള ഇരുമ്പുവളയത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇത്തരം 100 വളയമുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട കമ്പിയുടെ നീളം എത്രയാണ്?

പരപ്പളവ്



വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ചില സമബഹുഭുജങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നു. വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുംതോറും ബഹുഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോടടുക്കുന്നു.

12 വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമബഹുഭുജം വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ വച്ചിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കൂ.



ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും? കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ച് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഈ ബഹുഭുജത്തെ 12 തുല്യ ത്രികോണങ്ങളാക്കാം.

ഒരു വശം b യും ഉയരം h ഉം ആയാൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}bh$ ആയിരിക്കും.

12 ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് $= 12 \times \frac{1}{2} \times bh$

$$= \frac{1}{2} \times 12b \times h$$

ഇതിൽ 12b എന്നത് സമബഹുഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് ആണല്ലോ. സമബഹുഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = $\frac{1}{2} \times$ ചുറ്റളവ് × ഉയരം.

വശങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇനിയും കൂട്ടാമല്ലോ. ഉദാഹരണത്തിന് നൂറു വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമബഹുഭുജം വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ സങ്കൽപ്പിച്ചു നോക്കൂ (കമ്പ്യൂട്ടറിൽ വരയ്ക്കുകയുമാവാം). സമബഹുഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് വളരെ അടുത്ത സംഖ്യയായിരിക്കുമല്ലോ. h എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിനോടും അടുത്തുവരും. അപ്പോൾ സമബഹുഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവും വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം വളരെ കുറവായിരിക്കും.

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} \times$ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് × ആരം

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു കിണറിന്റെ ചുറ്റളവ് 9.42 മീറ്റർ ആയാൽ ഈ കിണർ കുഴിക്കാൻ എടുത്ത സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

ചുറ്റളവ് $= 2\pi r = 9.42$

$\therefore$ r $= \frac{9.42}{2 \times 3.14} = \frac{3}{2} = 1.5$ മീറ്റർ

$\therefore$ പരപ്പളവ് $= \pi r^2 = 3.14 \times 1.5 \times 1.5$

$= 7.065$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

നാട്ടറിവ്

ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയെ വ്യാസത്തിന്റെ പകുതി കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ പരപ്പളവ് കിട്ടും എന്ന പ്രായോഗിക അറിവ് കിണർ കുഴിക്കുന്നവർ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്.

ചെയ്തുനോക്കാം

1) 10 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള പലകയിൽനിന്നും ഉണ്ടാക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

2) വൃത്താകൃതിയിലുള്ള കളിസ്ഥലത്തിന്റെ വ്യാസം 100 മീറ്ററായാൽ അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

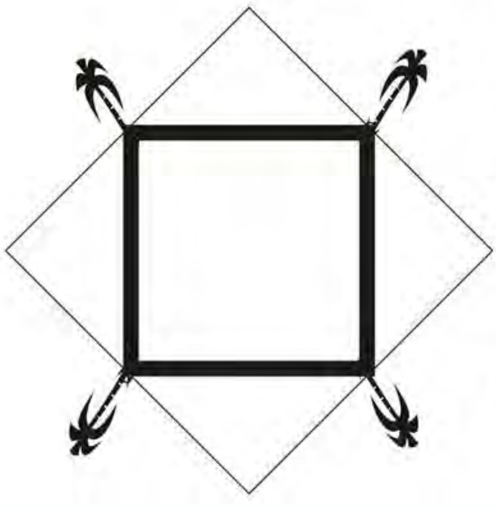
പഠനനേട്ടങ്ങൾ

- വൃത്തവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഞാൺ, ചാപം എന്നിവ മനസ്സിലാക്കുന്നു.
- വൃത്തിലെ ഒരു ചാപം കേന്ദ്രവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം മനസ്സിലാക്കുന്നു.
- ചക്രിയചതുർഭുജങ്ങളുടെ എതിർകോണുകളുടെ പ്രത്യേകത മനസ്സിലാക്കുന്നു.
- വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവും ചുറ്റളവും അറിഞ്ഞ് പ്രായോഗികപ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നു.

5 രേഖീയ സംഖ്യകൾ

അഭിന്നകങ്ങൾ

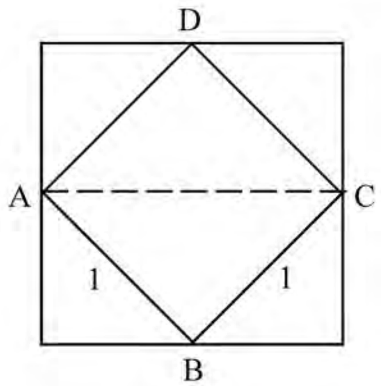
സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കുളം. ഇതിന്റെ 4 മൂലകളിലും ഓരോ തെങ്ങ്. ഈ കുളത്തിന്റെ വലുപ്പം (പരപ്പളവ്) ഇരട്ടിയാക്കണം. സമചതുരാകൃതി തന്നെ വേണം. ഒരു നിബന്ധന കൂടിയുണ്ട്. തെങ്ങുകളൊന്നും മുറിക്കരുത്. ഇതു സാധിക്കുമോ?



ചിത്രം നോക്കൂ. ഉള്ളിലെ സമചതുരത്തിന്റെ ഇരട്ടി പരപ്പളവാണല്ലോ പുറത്തെ സമചതുരത്തിന്. (ഇത്തരം ഒരു ചിത്രം കടലാസ്സിൽ വരച്ച് വെട്ടിയെടുത്ത് ത്രികോണങ്ങൾ ഉള്ളിലേക്ക് മടക്കി നോക്കൂ. നാലു ത്രികോണങ്ങളുടേയും പരപ്പളവ് ഉള്ളിലെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനു തുല്യമാണല്ലോ.)

തെങ്ങുകളുടെ സ്ഥാനത്തിന് മാറ്റം വന്നിട്ടുമില്ല.

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം. ഈ പുതിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരുവശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?



വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളമാണല്ലോ. ഇത്തരത്തിലൊരു ചിത്രം വരച്ച് വികർണത്തിന്റെ നീളം അളന്നു നോക്കൂ. സൗകര്യത്തിനുവേണ്ടി 1 ഇഞ്ച് വശമുള്ള സമചതുരം ABCD വരച്ച് അതിന്റെ വികർണം എത്ര ഇഞ്ചാണ് എന്നു നോക്കാം.

$1\frac{1}{2}$ ഇഞ്ചാണോ? കൃത്യം $1\frac{1}{2}$ ഇഞ്ച് ഇല്ല എന്നു കാണാമല്ലോ.

പൈഥാഗറസ് തത്വം ഉപയോഗിച്ച് ഈ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം.

Geogebra application തുറന്ന് segment - segment with given length എന്ന ക്രമത്തിൽ select ചെയ്ത് ഒരു point click ചെയ്ത് length 1 എന്ന് കൊടുക്കുക. Polygon - Regular Polygon എന്ന ക്രമത്തിൽ select ചെയ്ത് ഈ line segment ന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലും click ചെയ്യുക. Vertices 4 എന്ന് കൊടുക്കുക. സമചതുരം കിട്ടുന്നു. വീണ്ടും segment tool എടുത്ത് ഒരു വികർണം വരച്ച് അതിൽ Right click ചെയ്ത് object properties - show name and value select ചെയ്താൽ വികർണത്തിന്റെ നീളം 1.41 എന്നു കാണാം.

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$AB = BC = 1$ ആയതുകൊണ്ട് $AC^2 = 1 + 1 = 2$ എന്നുകിട്ടുന്നു. അതായത് വശം 1 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണനീളത്തിന്റെ വർഗം 2 ആണ്.

വർഗം 2 ആയ ഒരു സംഖ്യയുണ്ടോ?

Geogebra യിൽ നമുക്ക് ഈ നീളം 1.41 എന്ന് കിട്ടിയല്ലോ. $1.41^2 = 1.9881$, ഇത് 2 നേക്കാൾ കുറവാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ നീളം 1.41 നേക്കാൾ അൽപ്പം കൂടുതലാണ്. കുറച്ചുകൂടി കൃത്യമായി പറഞ്ഞാൽ 1.414 നും 1.415 നും ഇടയിലാണ്. ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ ഈ നീളം 1.414213... എന്നു തുടരുന്നതു കാണാം. അതായത് വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഒരു നിരയുണ്ടാക്കാം എന്നല്ലാതെ വർഗം 2 വരുന്ന ഒരു ദശാംശസംഖ്യ കിട്ടുകയില്ല.

1 മീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം ഏകദേശം 1 മീറ്റർ, 41 സെന്റീമീറ്റർ 4 മില്ലീമീറ്റർ എന്നു പറയാം.

ഇതുവരെ നാം പരിചയപ്പെട്ട പൂർണസംഖ്യകൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ, അവയുടെയെല്ലാം ന്യൂനങ്ങൾ ഇവയെല്ലാം ചേർന്ന സംഖ്യാക്കൂട്ടത്തെ ഭിന്നകങ്ങൾ എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഈ കൂട്ടത്തിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടേയും വർഗം 2 അല്ല. അതായത്, ഒരു ഭിന്നകത്തിന്റേയും വർഗം 2 അല്ല.

5 ന്റെ വർഗം 25 ആണല്ലോ.

ഇതെങ്ങനെയാണ് എഴുതുന്നത്?

$5^2 = 25$

$\sqrt{25} = 5$ എന്നും എഴുതാം.

അതുപോലെ വർഗം 2 ആയ സംഖ്യയെ $\sqrt{2}$ എന്നെഴുതാം. ഭിന്നകം അല്ലാത്ത ഇത്തരം സംഖ്യകളെ അഭിന്നകങ്ങൾ എന്നാണ് പറയുന്നത്.

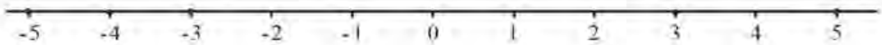
അപ്പോൾ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണ് വികർണത്തിന്റെ നീളം.

ഇതുപോലെ 3 ചതുരശ്ര യൂണിറ്റ് പരപ്പളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളത്തെ $\sqrt{3}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. പ്രായോഗിക ആവശ്യങ്ങൾക്ക് ഇത്തരം അഭിന്നകങ്ങളുടെ ഏകദേശ വിലയായ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ദശാംശസംഖ്യകളോ ആണുപയോഗിക്കുന്നത്. $\sqrt{3}$ ന്റെ ഏകദേശ വില 1.732 ആണ്.

സംഖ്യാരേഖ

ഇതുവരെയായി നാം പരിചയപ്പെട്ട എല്ലാ സംഖ്യകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ, അവയുടെയെല്ലാം ന്യൂനങ്ങൾ, പൂജ്യം, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ തുടങ്ങിയ അഭിന്നകങ്ങൾ ഇവയെല്ലാം വലുപ്പക്രമത്തിൽ ഒന്ന് അടയാളപ്പെടുത്താൻ ശ്രമിച്ചാലോ?

ഒരു വര വരച്ച് ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിനെ '0' എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഒരു നിശ്ചിത അകലത്തിൽ 1 എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ 0 മുതൽ 1 വരെയുള്ള അകലമാണ് 1 യൂണിറ്റ്. ഈ തോത് ഉപയോഗിച്ച് പൂർണസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളും ഈ രേഖയിൽ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ അടയാളപ്പെടുത്താം.



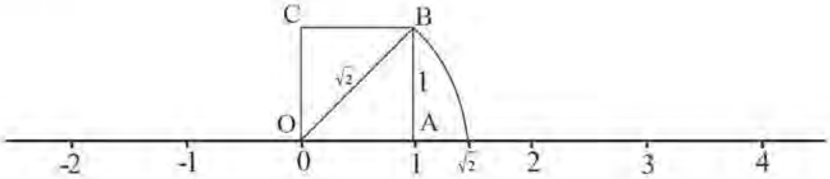
ഈ വരയെ സംഖ്യാരേഖ എന്നാണ് പറയുന്നത്.

- ഒരു സംഖ്യാരേഖ വരച്ച് താഴെപ്പറയുന്ന സംഖ്യകളുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തു.

  $\frac{7}{2}, \frac{-5}{2}, -3, \frac{5}{2}$

സംഖ്യാരേഖയിൽ എല്ലാ പൂർണസംഖ്യകളേയും എല്ലാ ഭിന്നസംഖ്യകളേയും അടയാളപ്പെടുത്താമെന്നു കണ്ടുവല്ലോ. അങ്ങനെയെങ്കിൽ അഭിന്നകസംഖ്യകൾക്ക് സംഖ്യാരേഖയിൽ സ്ഥാനമുണ്ടോ? $\sqrt{2}$ എന്ന അഭിന്നകത്തെ സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്താൻ കഴിയുമോ?

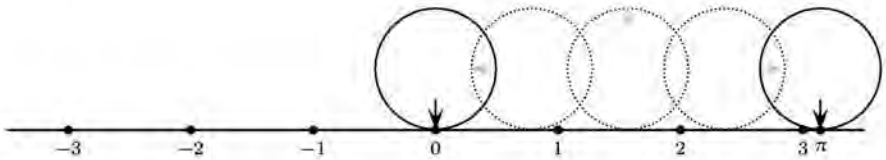
എന്താണ് $\sqrt{2}$ എന്ന നീളം? വശം 1 യൂണിറ്റ് ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളമാണല്ലോ.



OB എന്ന നീളം 0 ത്തിൽനിന്ന് സംഖ്യാരേഖയിലേയ്ക്ക് അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ.

π എന്ന സംഖ്യയും ഒരു അഭിന്നകമാണ്. ഈ സംഖ്യയുടെ സ്ഥാനവും സംഖ്യാ രേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്താൻ കഴിയും.

വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു അടപ്പോ നാണയമോ എടുത്ത് അതിന്റെ പരിധിയിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. അതിന്റെ വ്യാസം 1 യൂണിറ്റായി എടുത്ത് സംഖ്യാ രേഖയിൽ സംഖ്യകളുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുക. സംഖ്യാരേഖയിലെ പൂജ്യത്തിൽ ബിന്ദു വരുന്നവിധം വട്ടം വച്ച് ഒരു പ്രാവശ്യം പൂർണമായി ഉരുട്ടുക. അപ്പോൾ നാം അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദു സംഖ്യാരേഖ തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് 0 ൽ നിന്ന് π യൂണിറ്റ് അകലമായിരിക്കുമല്ലോ.



കേവലമൂല്യം

സംഖ്യാരേഖയിൽ 3, 7 എന്നീ സംഖ്യകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ്?

4 യൂണിറ്റ് ആണല്ലോ.

3, 1 ഇവ തമ്മിലോ?

$-3, -7$ ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര യൂണിറ്റ് ആണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കൂ.

$-1, 5$ ഇവ തമ്മിലോ?

-1ൽനിന്ന് പൂജ്യത്തിലേക്ക് 1 യൂണിറ്റ്. പൂജ്യത്തിൽനിന്ന് 5 ലേക്ക് 5 യൂണിറ്റ്. ആകെ 6 യൂണിറ്റ്.

സംഖ്യാരേഖയിൽ പൂജ്യത്തിൽനിന്ന് 4 ലേക്കുള്ള ദൂരവും -4 ലേക്കുള്ള ദൂരവും 4 യൂണിറ്റ് ആണല്ലോ. അതായത് '0' ൽ നിന്ന് -4 ലേക്കുള്ള ദൂരം സംഖ്യയുടെ ന്യൂനം ഒഴിവാക്കി 4 യൂണിറ്റ് എന്നാണ് എഴുതുന്നത്. ഇതിനെ -4ന്റെ കേവലമൂല്യം എന്ന് പറയും, ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച് $|-4| = 4$ എന്നെഴുതാം.

$$\left|\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$$

$$\left|\frac{-5}{3}\right| = \frac{5}{3}$$

$$|2.3| = 2.3$$

$$|-2.3| = 2.3$$

കേവലമൂല്യം

സംഖ്യാരേഖയിൽ പൂജ്യത്തിൽനിന്ന് ഒരു സംഖ്യയിലേയ്ക്കുള്ള അകലമാണ് ആ സംഖ്യയുടെ കേവലമൂല്യം.

ചെയ്തുനോക്കാം

1) സംഖ്യാരേഖയിൽ താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുക.

i) 2, 4	ii) −2, −4	iii) 2, −4	iv) −2, 4
v) 3, −8	vi) −3, 8	vii) −3, −8	viii) 0, −5

2) സംഖ്യാരേഖയിൽ 3 ൽനിന്ന് 7 യൂണിറ്റ് അകലത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ ഏതെല്ലാം?

3) സംഖ്യാരേഖയിൽ P എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് അഞ്ചിലേക്കും ഒന്നിലേക്കും ഒരേ അകലമാണെങ്കിൽ P ഏതു സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു?

4) സംഖ്യാരേഖയിൽ −2 കേന്ദ്രമായി 5 യൂണിറ്റ് ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ വൃത്തം സംഖ്യാരേഖയിലെ ഏതെല്ലാം ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകും?

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

* പൂർണസംഖ്യകൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇവ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് എല്ലാ നീളങ്ങളേയും സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ലെന്ന് തിരിച്ചറിയുന്നു.
* വശം 1 യൂണിറ്റ് ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണനീളത്തിന്റെ വർഗം 2 ആണെന്നും ഈ നീളത്തെ $\sqrt{2}$ എന്ന അഭിന്നകസംഖ്യകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം എന്നും അറിയുന്നു.
* സംഖ്യാരേഖ എന്ന ആശയത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ധാരണ നേടുന്നു.
* സംഖ്യാരേഖയിൽ വിവിധ സംഖ്യകളുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്താനും വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടുപിടിക്കാനും കഴിയുന്നു.

സ്തംഭങ്ങൾ

6

ഈ കെട്ടിടം നോക്കൂ.

ഏതൊക്കെ സാധനങ്ങൾ വേണം ഇതുപോലെ കെട്ടിടങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ. മരം, മണൽ, മെറ്റൽ, ഇഷ്ടിക, വെട്ടുകല്ല്, കരിങ്കല്ല്, തൂണുകൾ ഉണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ അച്ചുകൾ, വെള്ളം നിറയ്ക്കാൻ വേണ്ടി പൈപ്പുകൾ, ബാരലുകൾ, സിമന്റ്, കമ്പികൾ എന്നിങ്ങനെ എന്തെല്ലാം.

ഈ സാധനങ്ങളുടെയെല്ലാം ആകൃതി ഒന്ന് ആലോചിച്ചു നോക്കൂ. കൃത്യമായ ആകൃതി ഉള്ളവയും കൃത്യമായ ആകൃതി ഇല്ലാത്തവയും ഉണ്ട്. ഇവ ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കിയ കെട്ടിടത്തിനോ?

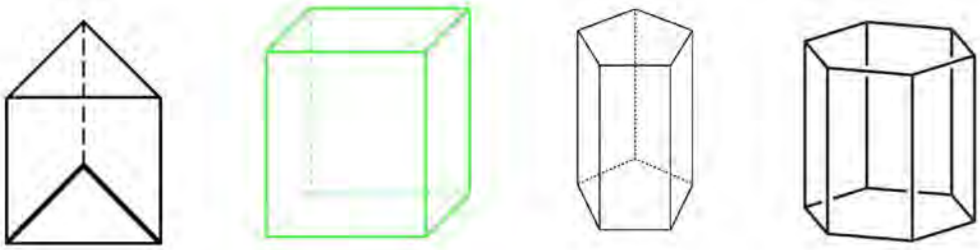
തൂണുകൾ തന്നെ പലവിധം. ഉരുണ്ട തൂണുകൾ, ചതുരാകൃതിയിലുള്ള തൂണുകൾ, സമചതുരാകൃതിയിലുള്ളവ, ഷഡ്ഭുജാകൃതിയിലുള്ളവ.

മേൽക്കൂരകളോ? കൂർത്തിരിക്കുന്ന മേൽക്കൂരകൾ, പരന്നിരിക്കുന്നവ, ചരിഞ്ഞിരിക്കുന്നവ എന്നിങ്ങനെ അതും പലവിധം.

എന്നാലും ഇവയ്ക്കെല്ലാം ചില പൊതുഗുണങ്ങളുണ്ട്. എല്ലാം കൃത്യമായ ആകൃതിയുള്ള ത്രിമാനരൂപങ്ങളാണ്. ഇത്തരം രൂപങ്ങളെ പൊതുവായി ***ഘനരൂപങ്ങൾ*** (Solid) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

മറ്റു ചില കാര്യങ്ങൾ കൂടി നോക്കാം.

ടെറസ്സുകൾ കോൺക്രീറ്റ് ചെയ്യുന്നത്, ചുമരുകൾ സിമന്റ് തേക്കുന്നത്, പെയിന്റ് ചെയ്യുന്നത് എന്നിവയ്ക്കെല്ലാം ചെലവ് കണക്കാക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടോ? ചതുരശ്ര അടിക്ക് ഇത്ര എന്ന തോതിലാണ് കരാറുറപ്പിക്കാറുള്ളത്. ഇനി മരത്തിന്റെ ചെലവ് കണക്കാക്കുന്നതോ? അത് ഒരു ക്യുബിക്ക് അടി മരത്തിന് ഇത്ര രൂപ എന്ന കണക്കിനും. പല ആകൃതിയുള്ള ഇത്തരം രൂപങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ്, ഉള്ളളവ് എന്നിവ എങ്ങനെയാണ് കണക്കാക്കുന്നത്? അതൊക്കെ അറിയുവാനായി ചില പ്രത്യേക രൂപങ്ങളെക്കുറിച്ച് അൽപ്പം മനസ്സിലാക്കാം.



മുകളിലെ കെട്ടിടങ്ങളുടെ ചിത്രത്തിലും ഇതുപോലുള്ള രൂപങ്ങൾ കാണുന്നുണ്ടല്ലോ? ഇവയ്ക്കെല്ലാം ചില പ്രത്യേകതകൾ ഉണ്ട്. എന്തൊക്കെയാണെന്ന് കണ്ടെത്താൻ നോക്കൂ.

എല്ലാം ത്രിമാനരൂപങ്ങളാണ്. ഒരു തലത്തിൽ ഒതുങ്ങിനിൽക്കാത്തവ. ഇവയുടെ മുകളിലും താഴെയും ഉള്ള ബഹുഭുജങ്ങൾക്ക് എന്തെങ്കിലും പ്രത്യേകത ഉണ്ടോ? വശങ്ങളിലെ മുഖങ്ങൾക്കോ?

മുകളിലും താഴെയും ഉള്ള ബഹുഭുജങ്ങൾ ഒരുപോലെയാണ്. വശങ്ങളിലോ? ഒരുപോലെയുള്ള ചതുരങ്ങളും.

ഇത്തരം ഘനരൂപങ്ങളെ ***സ്തംഭങ്ങൾ*** (Prisms) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. ഇതിന്റെ വശങ്ങളെ സ്തംഭങ്ങളുടെ മുഖങ്ങൾ (Faces) എന്നും പറയുന്നു. മുകളിലും താഴെയും ഉള്ള മുഖങ്ങളെ പാദമുഖങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ അഗ്രമുഖങ്ങൾ എന്നും വശങ്ങളിലെ മുഖങ്ങളെ പാർശ്വമുഖങ്ങൾ എന്നും പറയുന്നു.

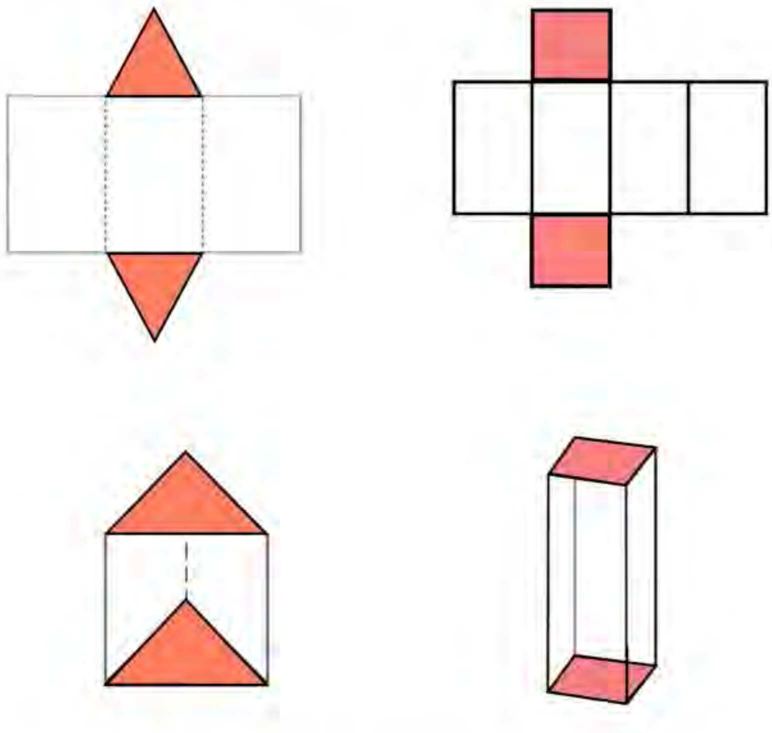
പലതരം സ്തംഭങ്ങൾ

പാദമുഖത്തിന്റെ ആകൃതിക്ക് അനുസരിച്ചാണ് സ്തംഭങ്ങൾക്കു പേര് നൽകുന്നത്. അപ്പോൾ ഒന്നാമത്തേത് ത്രികോണസ്തംഭം (triangular prism), രണ്ടാമത്തേത് ചതുരസ്തംഭം (rectangular prism) എന്നിങ്ങനെ.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ മറ്റുള്ളവയുടെ പേരുകൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

ഇനി ചില സ്തംഭങ്ങൾ നമുക്ക് ഉണ്ടാക്കി നോക്കാം.

ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ രൂപങ്ങൾ കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത് അവ മടക്കി സ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കിയതു നോക്കൂ.



ഇത്തരം മറ്റു സ്തംഭങ്ങളും ഉണ്ടാക്കി നോക്കൂ.

ഇപ്പോൾ സ്തംഭത്തിന്റെ പാദമുഖങ്ങളും, പാർശ്വമുഖങ്ങളും നാം കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത രൂപത്തിന്റെ ഏതേതു ഭാഗങ്ങളാണെന്നു തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്നുണ്ടല്ലോ? ഇവയുടെ ഏതേത് അളവുകളാണ് പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതെന്നും ചർച്ച ചെയ്യുക.

ഇതുപോലുള്ള അനേകം രൂപങ്ങൾ നമുക്ക് ചുറ്റും ഉണ്ട്. അത്തരം രൂപങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച് അവയൊക്കെ ഏതുതരം സ്തംഭങ്ങൾ ആണെന്ന് എഴുതുക.

സ്തംഭങ്ങളുടെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

ഒരു ചുമരിന് 5 മീറ്റർ നീളവും 4 മീറ്റർ വീതിയും ഉണ്ട്. ഇതിന് ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 150 രൂപ വിലയുള്ള ചുമർ കടലാസ് (wall paper) ഒട്ടിച്ചത് കണ്ടോ? എത്ര രൂപ ചെലവാകും?

ഇത് കണക്കാക്കാൻ ഈ ചുമരിന്റെ (ചതുരത്തിന്റെ) പരപ്പളവ് കണ്ടാൽ മതിയല്ലോ?

പരപ്പളവ് $= 5 \times 4$

$= 20$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

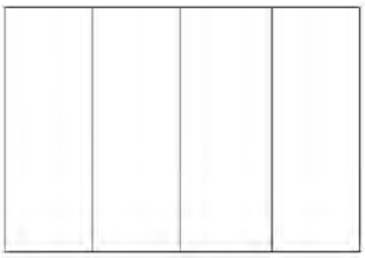
ഒരു ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 150 രൂപ ആയതിനാൽ 20 ചതുരശ്രമീറ്ററിന് എത്ര എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ?

ഇനി ചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തൂണിന് ഒട്ടിച്ച ചുമർ കടലാസിന്റെ ചെലവ് കാണണമെന്നിരിക്കട്ടെ. ഓരോ മുഖങ്ങളുടേയും പരപ്പളവുകൾ കണ്ട് കൂട്ടിയാൽ മതി.

മറ്റൊരു മാർഗം ആലോചിക്കാം.

സ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ വേണ്ടി നമ്മൾ കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത രൂപം ഒന്ന് ഓർത്തു നോക്കൂ. അതുപോലെ ഈ തൂണിന്റെ 4 പാർശ്വമുഖങ്ങളിലും ഒട്ടിച്ച ചുമർ കടലാസ് നിവർത്തിവെച്ചത് ഒന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കൂ.

അപ്പോൾ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ 4 ചതുരങ്ങൾ കിട്ടും.



ഈ 4 ചതുരങ്ങൾ ചേർന്ന് ഒരു വലിയ ചതുരവും. ഈ വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ആണല്ലോ നമ്മുടെ ചുമർ കടലാസിന്റെ പരപ്പളവ്.

വലിയ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെ അളവുകളുമായി എങ്ങനെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു?

തൂണിന്റെ പാദമുഖത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണല്ലോ വലിയ ചതുരത്തിന്റെ വീതിയായി വന്നത്. അതുപോലെ തൂണിന്റെ ഉയരം, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ നീളവുമാണ്.

ഇനി ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും അതിലൂടെ ചുമർ കടലാസിന്റെ പരപ്പളവും കണ്ടെത്താം. ഈ പ്രവർത്തനത്തിലൂടെ എന്ത് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിച്ചു?

ഒരു ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ സ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവിനെ ഉയരംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതി.

മറ്റു സ്തംഭങ്ങൾക്കും ഇത് ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിച്ച് നോക്കൂ.
അപ്പോൾ നാം കണ്ടെത്തിയതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

ഏതൊരു സ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ്, ആ സ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

ഒരു കണക്ക് നോക്കാം

ഒരു കെട്ടിടത്തിന് ഒരേ വലുപ്പമുള്ള 5 തൂണുകൾ ഉണ്ട്. ഇവ സമചതുര സ്തംഭാകൃതിയിലാണ്. പാദവശം 30 സെന്റിമീറ്റർ, ഉയരം 3 മീറ്റർ. തൂണുകളുടെ പാർശ്വമുഖങ്ങൾക്ക് നിറം നൽകുന്നതിന് ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 300 രൂപ നിരക്കിൽ എന്ത് ചെലവ് വരും?

പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ്, പാദചുറ്റളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണല്ലോ.

പാദം സമചതുരമായതിനാൽ പാദചുറ്റളവ് $= 30 \times 4 = 120$ സെന്റിമീറ്റർ
$= 1.20$ മീറ്റർ

ഉയരം $= 3$ മീറ്റർ

പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ് $= 3 \times 1.20 = 3.60$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

ഒരു ചതുരശ്രമീറ്റർ നിറം നൽകുന്നതിന് ചെലവ് 300 രൂപ ആണല്ലോ.

അപ്പോൾ ഒരു തൂണിന് നിറം നൽകുന്നതിനുള്ള ചെലവ്
$= 300 \times 3.60$
$= 1080$ രൂപ

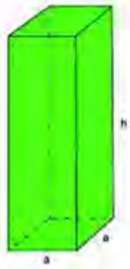
5 തൂണുകൾക്ക് നിറം നൽകുന്നതിനുള്ള ചെലവ് $= 5 \times 1080 = 5400$ രൂപ

ചെയ്തുനോക്കാം

- ചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തൂണിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 44 സെന്റിമീറ്റർ, ഇതിന്റെ ഉയരം 30 സെന്റിമീറ്റർ. പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ് എത്ര?
- ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദവക്ക് 18 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററും ആകുന്നു. അതിന്റെ പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ് എന്ത്?
- ഒരു ഹാളിന് സമചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള 5 തൂണുകൾ ഉണ്ട്. ഇതിന്റെ താഴത്തെ ഒരുവശത്തിന്റെ നീളം 25 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 3 മീറ്ററും ആണ്. ഇത്തരം 5 തൂണുകൾക്ക് നിറം നൽകുന്നതിന് ചതുരശ്ര മീറ്ററിന് 400 രൂപ നിരക്കിൽ എന്ത് ചെലവ് വരും?
- ഒരു സമചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തൂണിന്റെ പാർശ്വതലമുഖങ്ങൾക്ക് ചുമർ കടലാസ് ഒട്ടിച്ചിട്ടുണ്ട്. പാർശ്വമുഖങ്ങൾ കൃത്യമായി പൊതിയാൻ 900 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ചുമർകടലാസ് ആവശ്യമായി വന്നു. തൂണിന്റെ ഉയരം 25 സെന്റിമീറ്റർ എങ്കിൽ തൂണിന്റെ പാദവശത്തിന്റെ നീളം എത്ര?

ഉപരിതലപരപ്പളവ്

ഒരു ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ മുഖങ്ങൾക്കെല്ലാം നിറം കൊടുക്കണമെങ്കിലോ?



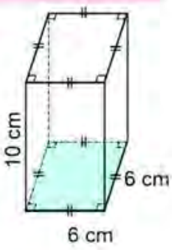
ഇവിടെ പാർശ്വമുഖങ്ങൾക്ക് മാത്രമല്ലല്ലോ നിറം കൊടുക്കേണ്ടത്. അഗ്രമുഖങ്ങൾക്കുകൂടി വേണം.

പാർശ്വമുഖപരപ്പളവിന്റെയും രണ്ടു അഗ്രമുഖപരപ്പളവിന്റെയും തുകയാണ് സ്തംഭങ്ങളുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്.

ഒരു കണക്ക് നോക്കാം

സമചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പെട്ടിയുടെ അളവുകളാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ പെട്ടി പൊതിയാൻ ആവശ്യമായ കടലാസ്സിനു ചുരുങ്ങിയത് എന്ത് പരപ്പളവ് ഉണ്ടാകണം?

ഇവിടെ ഉപരിതലപരപ്പളവാണല്ലോ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്.
അതിനു പാർശ്വമുഖപരപ്പളവും രണ്ട് അഗ്രമുഖപരപ്പളവും കൂട്ടിയാൽ മതി.



ചിത്രത്തിൽനിന്നും പാദചുറ്റളവ് 24 സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്റർ എന്നും കാണാം.

പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ് = പാദചുറ്റളവ് $\times$ ഉയരം

$= 24 \times 10$

$= 240$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

അഗ്രമുഖപരപ്പളവ് $= 6 \times 6$

$= 36$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ഉപരിതലപരപ്പളവ് $= 240 + 36 + 36$

$= 312$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

പൊതിയാൻ ആവശ്യമായ കടലാസിന്റെ പരപ്പളവ് 312 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ ആയിരിക്കും.

ചെയ്തുനോക്കാം

- മുകൾഭാഗം തുറന്ന ഒരു അക്വേറിയത്തിന്റെ പാദമുഖത്തിന്റെ നീളം 4 അടി, വീതി 2 അടി, ഉയരം 3 അടി വീതമാണ്. ഇത് ഉണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച ഗ്ലാസിന് 1 ചതുരശ്രഅടിക്ക് 150 രൂപയാണെങ്കിൽ ആകെ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?
- ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദവശം 9 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 18 സെന്റിമീറ്ററും ആകുന്നു. അതിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്? (a വശമായ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$)
- ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ പാദമുഖം സമഷഡ്ഭുജമാണ് . ഇതിന്റെ ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററും പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ് 720 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്?
- ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്ററും പാദവശങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും ആയിട്ടുള്ള രണ്ട് ചതുരസ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇവ രണ്ടും ചേർത്തുവച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കുന്നു. ആ സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എന്ത്?

വൃത്തസ്തംഭം

നാം ഇത്ര നേരം പരിചയപ്പെട്ട ഘനരൂപങ്ങളിൽ മുകളിലും താഴെയും ഒരേപോലെയുള്ള രണ്ടു ബഹുഭുജങ്ങളും വശങ്ങളിൽ ചതുരങ്ങളും ആണല്ലോ.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

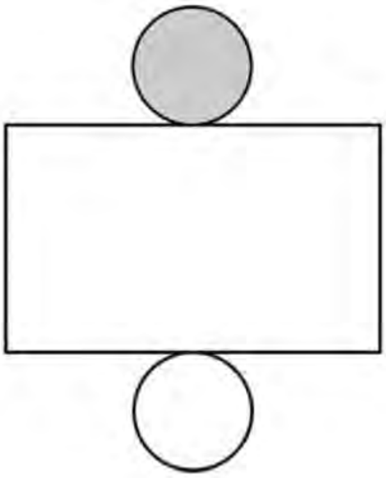
അഗ്രമുഖം വൃത്തമായ ഒരു രൂപമാണല്ലോ ഇത്. അതുകൊണ്ട് ഇത്തരം രൂപങ്ങളെ വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ (Cylinders) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

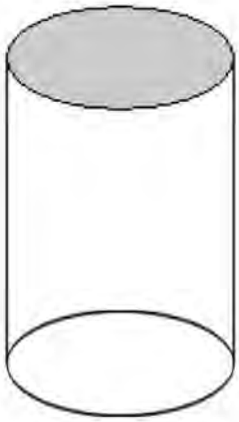
ഇതിന്റെ മറ്റു ചില പ്രത്യേകതകൾ നോക്കാം. ഇതിന്റെ പാദമുഖങ്ങൾ രണ്ടും വൃത്തമാണ്. എന്നാൽ പാർശ്വമുഖങ്ങളോ?

ചതുരമല്ല. മറിച്ചു വളഞ്ഞ മുഖം. അതിനാൽ ഈ മുഖത്തെ നമുക്ക് വക്രമുഖമെന്നു വിളിക്കാം. അപ്പോൾ ഇതിന് ഒരു വക്രമുഖവും രണ്ട് അഗ്രമുഖവും മാത്രമേ ഉള്ളൂ.

ഇതുപോലുള്ള മറ്റു സാധനങ്ങൾ കണ്ടെത്തി എഴുതുക.

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രമുഖപരപ്പളവ്





ചതുരാകൃതിയായ ഒരു കടലാസോ, ഒരു തകിടോ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതു പോലെ മുറിച്ചെടുത്ത് വളച്ച് ഇതുപോലൊരു വൃത്തസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കൂ.

നാം ഉപയോഗിച്ച കടലാസ്/തകിട് സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രമുഖമായി മാറി. അപ്പോൾ വക്രമുഖ പരപ്പളവ് എന്ന് പറയുന്നത് ഈ കടലാസിന്റെ പരപ്പളവാണല്ലോ? ഇതു തന്നെയല്ലേ മറ്റു സ്തംഭങ്ങളിലും കണ്ടത്. അതുകൊണ്ട് ഇവിടെയും വക്രമുഖ പരപ്പളവ് കാണാൻ നേരത്തെ ചെയ്ത മാർഗം ഉപയോഗിക്കാം.

പാദചുറ്റളവിനെ ഉയരംകൊണ്ട് ഗുണിക്കുക

സിലിണ്ടറിന്റെ ആരം r ഉം, ഉയരം h ഉം ആയാൽ,
വക്രമുഖ പരപ്പളവ് $= 2\pi rh$

ഒരു കണക്ക് നോക്കാം

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന രൂപം വളച്ച് ഒരു വൃത്തസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കുന്നു. അതിന്റെ വക്രമുഖ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഇത് ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ്

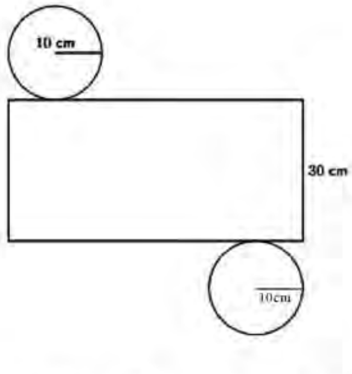
$= 2 \times \pi \times 10 = 20\,\pi$

വക്രമുഖ പരപ്പളവ് = പാദചുറ്റളവ് × ഉയരം

$= 20\pi \times 30$

$= 600 \times 3.14$

$= 1884$ ചതുരശ്ര സെ.മി.



ചെയ്തുനോക്കാം

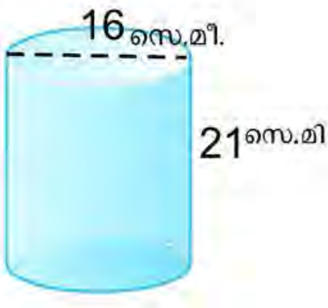
- വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന് 6 സെന്റിമീറ്റർ ആരവും 376.8 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ വക്രമുഖ പരപ്പളവും ഉണ്ട്. പാത്രത്തിന്റെ ഉയരം എന്ത്?
- നിലം നിരപ്പാക്കുന്ന വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ചക്രത്തിന്റെ ആരം 40 സെന്റിമീറ്റർ ആകുന്നു. ഇതിന്റെ നീളം 50 സെന്റിമീറ്റർ. ഈ ചക്രം ഒരുതവണ പൂർണമായി ഉരുണ്ടാൽ, നിരപ്പാകുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?
- ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രമുഖ പരപ്പളവ് 94.2 സെന്റിമീറ്റർ, ഉയരം 6 സെന്റി മീറ്റർ ആയാൽ ആരം എത്ര?

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ്

വൃത്തസ്തംഭത്തിന് ഒരു വക്രമുഖവും രണ്ട് അഗ്രമുഖങ്ങളും ആണല്ലോ? ഈ മൂന്ന് മുഖങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണ് ഉപരിതല പരപ്പളവ്.

ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കാം.

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന സിലിണ്ടറിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്?



അത് കണ്ടുപിടിക്കാൻ ആദ്യം വൃത്തത്തിന്റെ ആരം അറിയണം. വ്യാസം 16 സെന്റിമീറ്റർ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. ഇതിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ ആരം. അതുകൊണ്ട് ആരം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്.

വക്രമുഖ പരപ്പളവ് $= 2 \times 3.14 \times 8 \times 21$ സെന്റിമീറ്റർ

$= 1055.04$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

അഗ്രമുഖം വൃത്തമായതിനാൽ,

പാദപരപ്പളവ് $= \pi r^2$

$= 3.14 \times 8^2$

$= 200.96$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

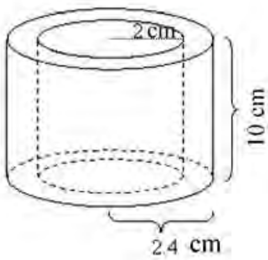
ഉപരിതല പരപ്പളവ് $= 1055.04 + 200.96 + 200.96$

$= 1456.96$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

ചെയ്തുനോക്കാം

- അനു പിറന്നാൾ സമ്മാനം കൊടുക്കാൻ വാങ്ങിയ കളിപ്പാട്ടം സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പെട്ടിയിലാണ് ഉള്ളത്. പെട്ടിയുടെ ആരം 7 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ഈ പെട്ടി വർണ്ണക്കടലാസു കൊണ്ട് പൊതിയണമെങ്കിൽ, ചുരുങ്ങിയത് എത്ര ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ കടലാസു വേണം.

- സിലിണ്ടർ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രം നോക്കൂ. ഇതിന്റെ ആരം 6 സെൻറിമീറ്ററും ഉയരം 15 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ഇതിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്?

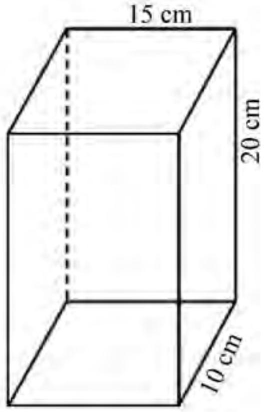


- ഒരു പൈപ്പിന്റെ ചിത്രമാണ് നൽകിയിരിക്കുന്നത്. അതിന്റെ അകത്തെ ആരം 2 സെന്റിമീറ്ററും പുറത്തെ ആരം 2.4 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ഉൾഭാഗം ഒഴിവാക്കിക്കൊണ്ടുള്ള ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്?

സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം എന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ നാം മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അതിന്റെ നീളം, വീതി, ഉയരം എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലമാണ് വ്യാപ്തം. നീളം l, വീതി b, ഉയരം h എന്നിങ്ങനെ എടുത്താൽ വ്യാപ്തം $= l \times b \times h$ ആയിരിക്കും.

ചിത്രത്തിൽ ഒരു ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ അളവുകൾ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ വ്യാപ്തം കണ്ടുനോക്കാം.



നീളം 15 സെന്റിമീറ്റർ, വീതി 10 സെന്റിമീറ്റർ, ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെ എടുത്താൽ

വ്യാപ്തം $= 15 \times 10 \times 20$

$= 3000$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

ഇവിടെ നീളവും വീതിയും ഗുണിക്കുമ്പോൾ ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ ഒരു മുഖത്തിന്റെ (പാദപരപ്പളവ്) പരപ്പളവ് കിട്ടുന്നു. ഇതിനെ ഉയരംകൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയാണ് ചെയ്തത്.

ചതുരസ്തംഭത്തിനു പകരം ഏത് ബഹുഭുജസ്തംഭം എടുത്താലും ഇത് ശരിയാണെന്നു കാണാം.

സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എന്നത് അഗ്രമുഖപരപ്പളവിനെ ഉയരംകൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതാണ്.

ഒരു കണക്ക് നോക്കാം

സമചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ ഓരോവശവും 10 സെന്റിമീറ്റർ വീതമാണ്. അതിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?

ഇവിടെ ആദ്യം വ്യാപ്തം കണക്കാക്കണം.

വ്യാപ്തം = അഗ്രമുഖ പരപ്പളവ് $\times$ ഉയരം

അഗ്രമുഖം സമചതുരമായതിനാൽ, പരപ്പളവ്

= (വശത്തിന്റെ അളവ്)^2

$= 10 \times 10 = 100$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

വ്യാപ്തം $= 100 \times 10$

$= 1000$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ

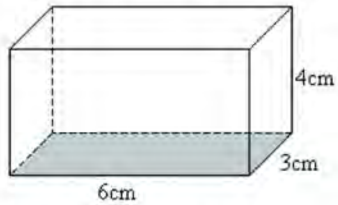
1000 ഘനസെന്റീമീറ്റർ = 1 ലിറ്റർ ആണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

നമ്മുടെ പാത്രത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 1000 ഘനസെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ 1 ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.

ചെയ്തുനോക്കാം

- ഒരു വലിയ പാത്രത്തിൽ നിറയെ വെള്ളമുണ്ട്. ചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ലോഹക്കട്ട ഈ വെള്ളത്തിലേക്ക് മുഴുവനായും താഴ്ത്തുന്നു. കട്ടയുടെ നീളം, വീതി, ഉയരം എന്നിവ 12 സെന്റിമീറ്റർ, 10 സെന്റിമീറ്റർ, 15 സെന്റിമീറ്റർ ആയാൽ പാത്രത്തിൽനിന്നും എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം പുറത്തേക്കു കവിഞ്ഞൊഴുകും.

- ഒരു കിണറിന്റെ ഉയരം 30 മീറ്ററും പാദമുഖത്തിന്റെ വ്യാസം 4 മീറ്ററും ആകുന്നു. ഇതിൽ പകുതി വെള്ളമുണ്ടെങ്കിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കിണറിലുണ്ട്? ആയിരം ലിറ്ററിന് 5 ഗ്രാം എന്ന കണക്കിൽ ഇതിലെ വെള്ളം ശുദ്ധീകരിക്കാൻ വേണ്ട ബ്ലീച്ചിംഗ് പൗഡർ എത്രയായിരിക്കും? (1 ക്യുബിക് മീറ്റർ = 1000 ലിറ്റർ)
- ചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ അളവുകൾ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ വ്യാപ്തം എന്ത്?



- ചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു അക്വേറിയത്തിന്റെ നീളം, വീതി, ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം 70 സെന്റിമീറ്റർ, 50 സെന്റിമീറ്റർ, 40 സെന്റിമീറ്റർ ആകുന്നു. ഇതിൽ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം വെള്ളമുണ്ട്. ഇനി എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൂടി ഒഴിച്ചാൽ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം വെള്ളമാകും?
- സമചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു മരക്കട്ടയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററും ആകുന്നു. ഇതിൽനിന്നും ചെത്തിയുണ്ടാക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സിലിണ്ടറിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്? വ്യാപ്തം എന്ത്?

കിണർ വെള്ളം ശുദ്ധീകരിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

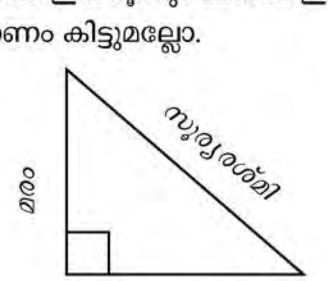
കിണറിലെ വെള്ളത്തിന്റെ അളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക. 1000 ലിറ്ററിന് 5 ഗ്രാം എന്ന തോതിൽ ബ്ലീച്ചിംഗ് പൗഡർ ഒരു വലിയ ബക്കറ്റിൽ പേസ്റ്റ് രൂപത്തിലാക്കുക. ശേഷം വെള്ളമൊഴിച്ച് കലക്കി തെളിയൂറ്റാൻ വയ്ക്കുക. അരമണിക്കൂറിനുശേഷം തെളിവെള്ളം ഊറ്റിയെടുത്ത് കിണറിലേക്ക് ഒഴിക്കുക. നന്നായി ഇളക്കണം. 12 മണിക്കൂറിനു ശേഷം വെള്ളം ഉപയോഗിക്കാം.

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

- ചതുരസ്തംഭം, സമചതുരസ്തംഭം, വൃത്തസ്തംഭം എന്നിവ മനസ്സിലാക്കുന്നു.
- ഇവയുടെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഉപരിതലപരപ്പളവ്, വ്യാപ്തം എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുന്നു.

7 ത്രികോണമിതി

ചെടികൾ നടുകയായിരുന്നു അനൂപ്. യാദൃശ്ചികമായാണ് ഒരു കാര്യം ശ്രദ്ധയിൽപ്പെട്ടത്. ചെടികളുടെ ഉയരവും അവയുടെ നിഴലും ഏകദേശം ഒരേ വലുപ്പം! പലപ്പോഴും വസ്തുക്കളുടെ ഉയരവും നിഴലിന്റെ നീളവും തമ്മിൽ വലിയ വ്യത്യാസമുള്ളതായാണ് അനൂപ് കണ്ടിട്ടുള്ളത്. വൈകുന്നേരവും രാവിലെയുമൊക്കെ അങ്ങനെ അനുഭവപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഇതെന്താ ഈ സമയത്ത് ഇങ്ങനെ? അളന്നപ്പോൾ ഒരേ നീളം. മരം, നിഴൽ, സൂര്യരശ്മി ഇവ മൂന്നും ചേർന്ന് ഇത്തരമൊരു ത്രികോണം കിട്ടുമല്ലോ.



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പ്രത്യേകതയെന്താണ്?

ഇത് ഒരു മട്ടത്രികോണമായിരിക്കുമല്ലോ? ഒരു കോൺ 90^0. ലംബവശങ്ങൾ തുല്യനീളമായതു കൊണ്ട് മറ്റ് രണ്ട് കോണുകളും തുല്യവും.

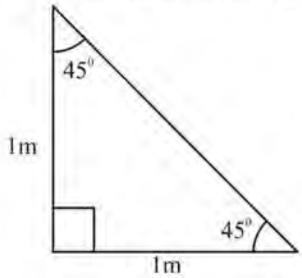
അതായത് 45^0, 45^0, 90^0 കോണുകളുള്ള മട്ടത്രികോണം.

ഥേൽസ്

വടിയുടെ നീളവും നിഴലിന്റെ നീളവും തുല്യമായ സമയത്ത്, പിരമിഡിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം അളന്നാണത്രേ ഥേൽസ് എന്ന പ്രാചീന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഈജിപ്തിലെ പിരമിഡുകളുടെ ഉയരം കണ്ടെത്തിയത്.

ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളെ സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണങ്ങൾ എന്നാണ് പറയാറ്.

സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണനീളം എന്താകുമെന്ന് നോക്കാം.



സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ 1 മീറ്റർ ആയാൽ പൈഥാഗറസ് തത്വപ്രകാരം

$$\text{കർണം}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\text{കർണം} = \sqrt{2}$$

ലംബവശങ്ങൾ 2 മീറ്റർ വീതമാണെങ്കിലോ?

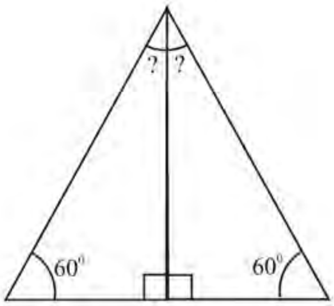
$$\text{കർണം}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$\text{കർണം} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

ലംബവശങ്ങൾ 3 മീറ്റർ വീതമായാലോ?

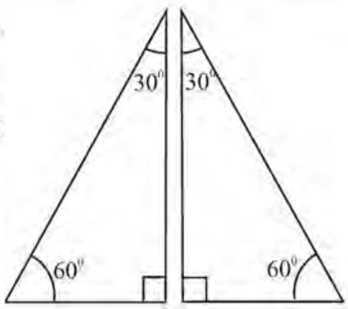
ഏതൊരു സമപാർശ്വ മട്ടത്രികോണത്തിലും ലംബവശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങായിരിക്കും കർണനീളം. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ സമപാർശ്വ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $1 : 1 : \sqrt{2}$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലായിരിക്കും.



ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 3 വശങ്ങളും തുല്യമായാൽ അവയുടെ കോണുകളുടെ പ്രത്യേകത യെന്താണ്?

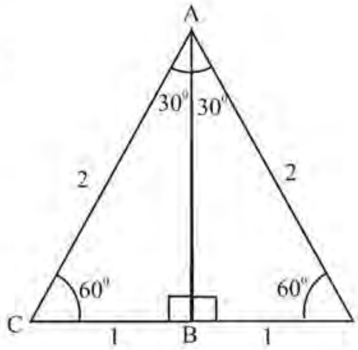
മൂന്നു വശങ്ങളും തുല്യമായ ത്രികോണത്തെ സമഭുജത്രികോണമെന്നാണ് പറയുക.

അതിന്റെ മൂന്നു കോണുകളും 60^0 വീതമായിരിക്കും.



ഒരു മൂലയിലൂടെ നേർപകുതിയാക്കിയാലോ?

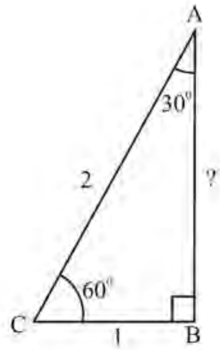
ഒരേ അളവുകളുള്ള രണ്ട് മട്ടത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും.



ചിത്രത്തിൽ വശങ്ങൾ 2 സെന്റിമീറ്റർ വീതമായ ത്രികോണമാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്. നേർപകുതിയാക്കിയാൽ. ഓരോ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളും കോണുകളും എത്രയെന്ന് നോക്കൂ.

30^0, 60^0, 90^0 കോണളവുകളുള്ള രണ്ട് മട്ടത്രികോണങ്ങളാണ് കിട്ടുക.

അവയുടെ കർണം 2 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു ലംബവശം 1 സെന്റിമീറ്ററും ആകും. മറ്റേ ലംബവശത്തിന്റെ നീളം എങ്ങനെ കണ്ടെത്തും?



പൈഥാഗറസ് തത്വമുപയോഗിച്ചാൽ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$= 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

$$AB = \sqrt{3}$$

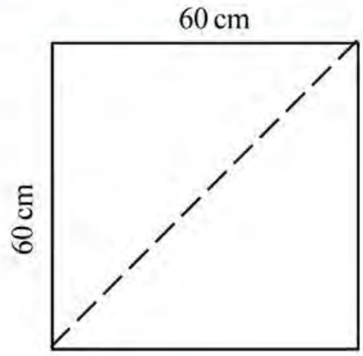
അതായത് കോണളവുകൾ 30^0, 60^0, 90^0 ആയ ഈ മട്ടത്രികോണത്തിൽ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ 1 സെ.മീ., $\sqrt{3}$ സെ.മീ., 2 സെ.മീ. എന്നിവയായിരിക്കും.

സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ 2 സെന്റിമീറ്ററിനു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും അളവുകളെടുത്ത് 30^0, 60^0, 90^0 കോണളവുകളുള്ള മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ കണ്ടെത്തി നോക്കൂ.

30^0, 60^0, 90^0 ത്രികോണങ്ങളിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങായിരിക്കും ഏറ്റവും വലിയ വശം. ചെറിയ വശത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങായിരിക്കും ഇടത്തരം വശം. അഥവാ 60^0 കോണിന് എതിരെയുള്ള വശത്തിന്റെ നീളം.

30^0, 60^0, 90^0 കോണളവുകളുള്ള ഏതൊരു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $1:\sqrt{3}:2$ എന്നായിരിക്കും.

സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പലകയ്ക്ക് ചുറ്റും ചട്ടക്കൂട് ഉണ്ടാക്കാൻ അളന്നപ്പോൾ വശത്തിന്റെ നീളം 60 സെന്റിമീറ്റർ വീതമാണ്. ഉറപ്പിനായി എതിർമൂലകൾ യോജിപ്പിക്കുന്നതിനായി പട്ടികയടിക്കണം. ഈ പട്ടികയ്ക്ക് എത്ര നീളം വേണം?



സമചതുരമായതിനാൽ എതിർമൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണം ആകുമല്ലോ?

പട്ടികയുടെ നീളം ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണമായതിനാൽ, ഈ നീളം ലംബവശത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങായിരിക്കും.

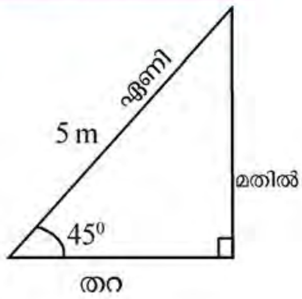
അതിനാൽ,

പട്ടികയുടെ നീളം $= 60 \times \sqrt{2}$

$= 60 \times 1.41$ ($\sqrt{2} = 1.41$)

$= 84.60$ സെന്റിമീറ്റർ

നിരപ്പായ തറയിൽ കുത്തനെയുള്ള ഒരു മതിലിനോട് 5 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ഏണി മതിലിന്റെ മുകളറ്റത്ത് തൊടുന്നവിധം ചാരിവച്ചിരിക്കുന്നു. ഏണി തറയുമായി 45^0 ചരിവ് ഉണ്ടാക്കുന്നുവെങ്കിൽ മതിലിന്റെ ഉയരം എത്ര?

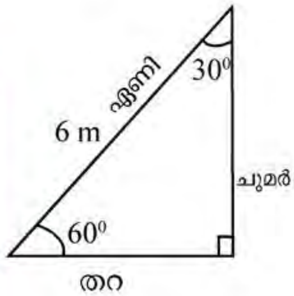


ഒരു ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ചാലോ? ഈ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഒരു കോൺ 45^0 ആയതിനാൽ മറ്റേ കോണും 45^0 ആകണമല്ലോ.

45^0 കോണിനെതിരെയുള്ള വശത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങായിരിക്കും 90^0 യ്ക്കെതിരായ വശം, അഥവാ കർണ നീളം. മറിച്ച് ലംബവശത്തിന്റെ നീളം കർണനീളത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ ഭാഗമായിരിക്കും.

അതിനാൽ മതിലിന്റെ ഉയരം $= \frac{5}{\sqrt{2}}$ മീറ്റർ

6 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ഏണിയുടെ മുകളറ്റം കെട്ടിടത്തിന്റെ മേൽക്കൂരയിൽ തൊടുന്ന വിധത്തിൽ തറയിൽ നിന്നും ചാരിവച്ചിരിക്കുന്നു. തറ നിരപ്പുമായി ഏണി 60^0 കോണാണ് ഉണ്ടാക്കുന്നതെങ്കിൽ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരമെത്ര? ഏണിയുടെ ചുവട്, കെട്ടിടത്തിന്റെ ചുമരിൽ നിന്നും എത്ര അകലെയായിരിക്കും?



ഒരു ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ചാൽ

മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 60^0 യും മറ്റേ കോൺ 30^0 എന്നും കിട്ടും.

30^0, 60^0, 90^0 കോണുകളുള്ള ത്രികോണമായതിനാൽ ഈ കോണുകൾക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലായിരിക്കുമെന്ന് കണ്ടു.

ചുമരിൽനിന്ന് ഏണിയുടെ അകലം 6 മീറ്ററിന്റെ പകുതിയാകണം. അതായത് 3 മീറ്റർ. ചുമരിന്റെ ഉയരം 30^0 കോണിനെതിരായ അളവായ 3 മീറ്ററിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങും ആകണം.

അതായത് $3\sqrt{3} = 3 \times 1.7$ ($\sqrt{3} = 1.7$ എന്നെടുത്തു)

$= 5.1$ മീറ്റർ

ചെയ്തുനോക്കാം

- ഒരാളുടെ ഉയരത്തിനും നിഴലിനും തുല്യനീളം ഉള്ളസമയത്ത് സൂര്യരശ്മി എത്ര ഡിഗ്രി ചരിഞ്ഞാണ് ഭൂമിയിൽ പതിക്കുന്നത്?
- 25 മീറ്റർ നീളമുള്ള ചരടിൽ വലിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന പട്ടം തറനിരപ്പുമായി 60^0 ചരിവിലാണ് ആകാശത്തുള്ളതെങ്കിൽ പട്ടം തറയിൽനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലായിരിക്കും?
- സൂര്യരശ്മി 30^0 ചരിഞ്ഞ് ഭൂമിയിൽ പതിക്കുന്ന സമയത്ത് ഒരു ടവറിന്റെ നിഴലിന് 25 മീറ്റർ നീളമുണ്ടെങ്കിൽ ടവറിന്റെ ഉയരം എത്രയാകണം?
- ഒരു വൈദ്യുതത്തൂണിന്റെ മുകളറ്റം ഒരു സ്റ്റേ-വയർ ഉപയോഗിച്ച് തറയിലെ കുറ്റിയിലേക്ക് കെട്ടിയിട്ടുണ്ട്. സ്റ്റേ-വയർ ഉറപ്പിച്ച കുറ്റി തൂണിൽനിന്നും 10 മീറ്റർ അകലെയും സ്റ്റേ-വയർ തറയുമായി 60^0 കോൺ ഉണ്ടാക്കുകയാണെങ്കിൽ തൂണിന്റെ ഉയരവും സ്റ്റേ-വയറിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക.

സർവ്വസമരൂപങ്ങൾ

സി.ഡി., A4 കടലാസ്, ചാർട്ടുപേപ്പർ, ഒരേ പുസ്തകത്തിലെ കടലാസുകൾ, ഒരേ ഇനം സ്റ്റാമ്പ്; ഇത്തരം വസ്തുക്കളുടെ പ്രത്യേകത നോക്കൂ.

അവയുടെ ആകൃതിയും വലുപ്പവും തുല്യമാണല്ലോ. ആകൃതിയും വലുപ്പവും തുല്യമായ രൂപങ്ങളെയാണ് തുല്യരൂപങ്ങൾ അഥവാ സർവ്വസമരൂപങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നത്. സർവ്വസമരൂപങ്ങൾ നമ്മുടെ ചുറ്റുപാടുനിന്ന് ഇനിയും കണ്ടെത്തൂ.

ഇനി തുല്യ ത്രികോണങ്ങളെ കുറിച്ച് നോക്കാം.

രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമാകണമെങ്കിൽ അവയുടെ ആകൃതിയും വലുപ്പവും തുല്യമാകണം. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 6 അളവുകളും (3 വശങ്ങളും 3 കോണുകളും) മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ 6 അളവുകൾക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ അവ തുല്യമാകും.

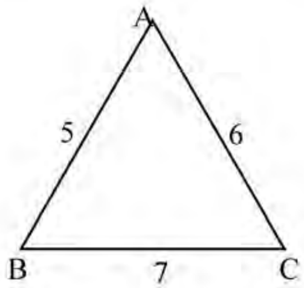
ചിത്രത്തിലെ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ അളന്നു നോക്കൂ. എന്തു പ്രത്യേകതയാണ് കാണുന്നത്?

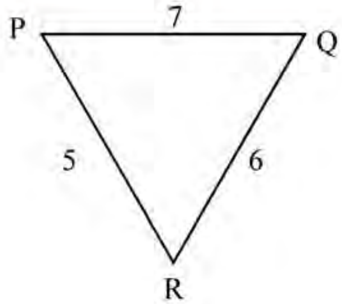
തുല്യരൂപങ്ങൾ

ഒരേ ആരമുള്ള വൃത്തങ്ങൾ

വശങ്ങൾക്ക് തുല്യനീളമുള്ള സമചതുരങ്ങൾ

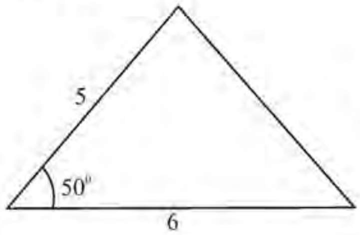
നീളം തുല്യമായ വരകൾ

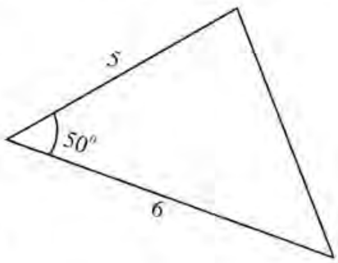




രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമാണോ എന്ന് നോക്കാൻ 6 അളവുകളും പരിശോധിക്കണമെന്നില്ല. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 3 വശങ്ങളും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ 3 വശങ്ങളും തുല്യമാണെങ്കിൽ തുല്യവശങ്ങൾക്കെതിരായ കോണുകളും തുല്യമായിരിക്കും. ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമാകും.

ഇതുപോലെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളും അവ ചേരുന്ന കോണും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങൾക്കും അവ ചേരുന്ന കോണിനും തുല്യമായാൽ മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും. മറ്റു കോണുകളും പരസ്പരം തുല്യമായിരിക്കും.

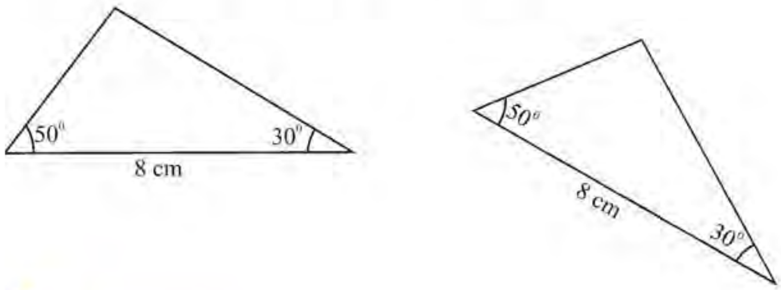




മറ്റ് വശങ്ങളും കോണുകളും അളന്നു നോക്കൂ. മേൽപ്പറഞ്ഞ കാര്യം ശരിയാണോ എന്ന് നോക്കൂ.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തെ കോണുകളും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരുവശത്തിനും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തെ കോണുകൾക്കും തുല്യമാണെങ്കിൽ തുല്യകോണുകൾക്കെതിരായ വശങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും, മൂന്നാം കോണും തുല്യമാകും. അപ്പോൾ ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും.

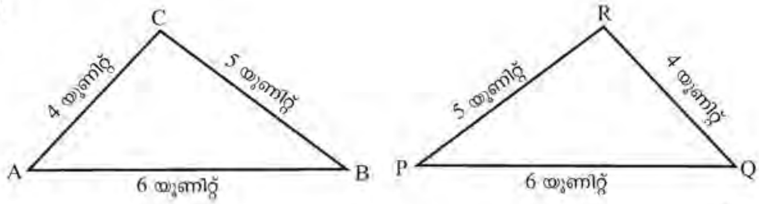
ചിത്രങ്ങളിലെ എല്ലാ അളവുകളും കണ്ടുപിടിക്കൂ.



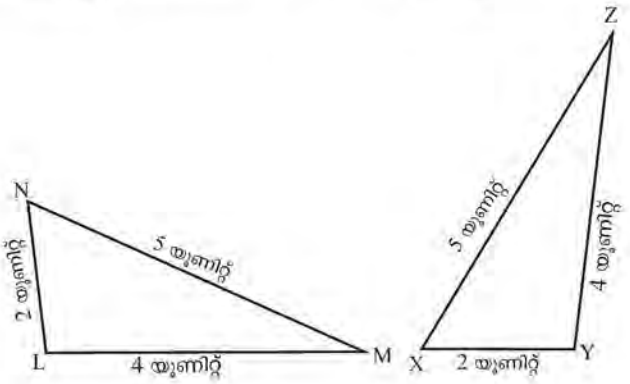
ചെയ്തുനോക്കാം

1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ചിത്രങ്ങളിലും ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾക്ക് തുല്യമായ കോണുകൾ മറ്റേ ത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

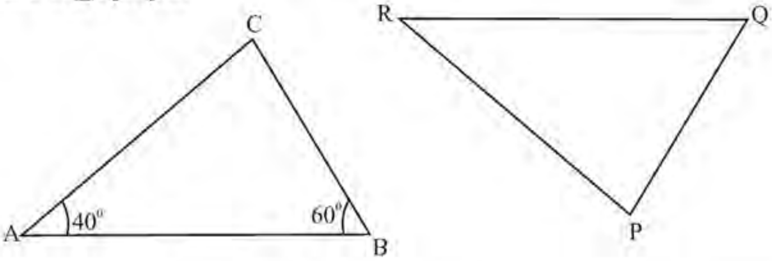
(a)



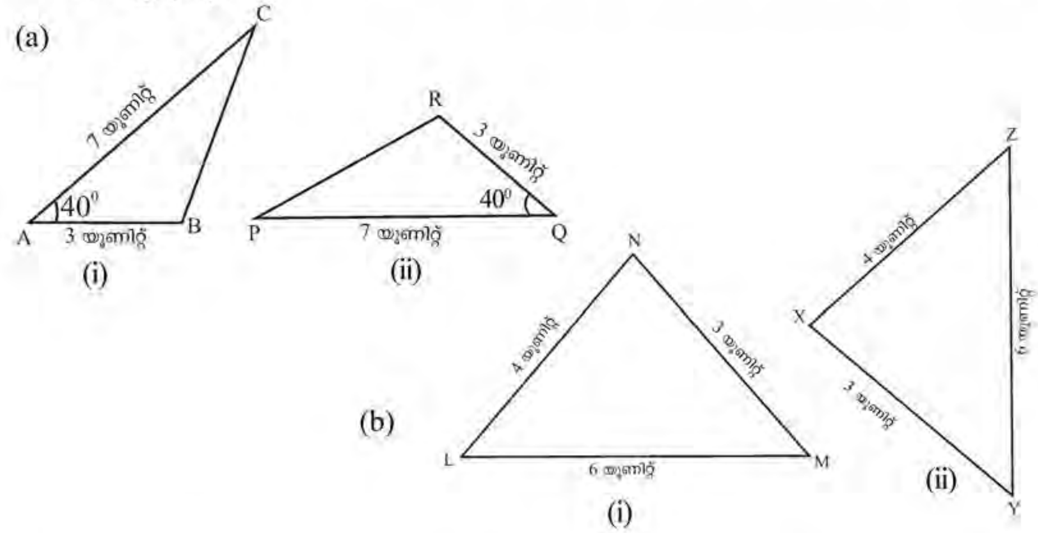
(b)



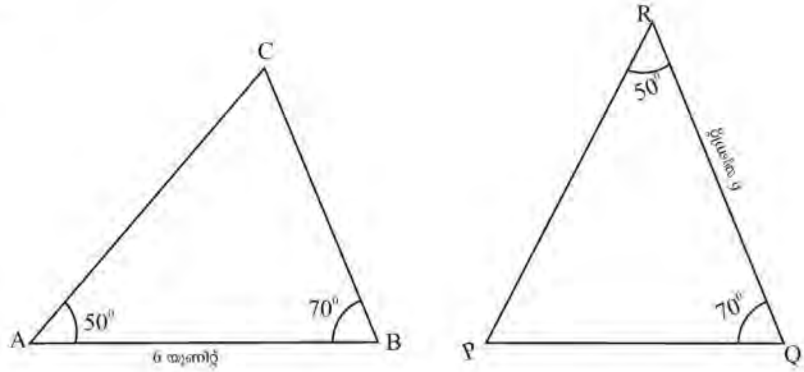
2) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ടുത്രികോണങ്ങളിൽ AB=QR, BC=RP, CA=PQ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ΔABC യിലെ $\angle C$ യും ΔPQR ലെ കോണുകളും കണ്ടുപിടിച്ചെഴുതുക.



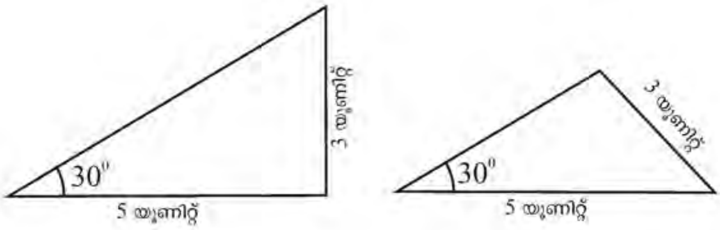
3) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ചിത്രങ്ങളിലും ഒന്നാം ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾക്ക് തുല്യമായ കോണുകൾ രണ്ടാംത്രികോണത്തിൽ നിന്നും കണ്ടുപിടിച്ചെഴുതുക.



4) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ചിത്രങ്ങളിലും ഒന്നാം ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമായ വശങ്ങൾ രണ്ടാം ത്രികോണത്തിൽനിന്നു കണ്ടുപിടിച്ചെഴുതുക.



ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ

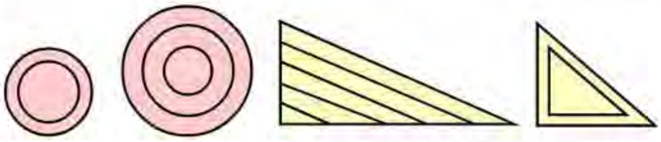


രണ്ടുവശങ്ങളും ഒരു കോണും തുല്യമായിട്ടും മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നില്ല. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങളും അവ ചേരുന്ന കോണും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങൾക്കും അവ ചേരുന്ന കോണിനും തുല്യമാണെങ്കിൽ ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമാകും. മറ്റു രണ്ടു കോണുകളും തുല്യമാകും.

കോണുകൾ മാത്രം മാറാതെ

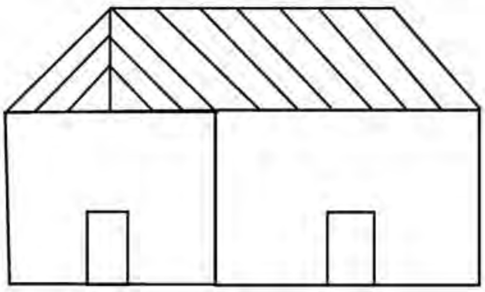
ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ. സ്റ്റാമ്പ് സൈസ് ഫോട്ടോ, പാസ്പോർട്ട് സൈസ് ഫോട്ടോ, വലുതാക്കിയ ഫോട്ടോ... ഇങ്ങനെയൊക്കെ കേട്ടിരിക്കുമല്ലോ. ചിത്രം വലുതോ, ചെറുതോ ആകും. പക്ഷേ, ആളുടെ രൂപത്തിൽ മാറ്റമുണ്ടാകുമോ? ഒരേ തോതിൽ രൂപം ചെറുതാകുകയോ വലുതാകുകയോ ചെയ്യുമല്ലോ?

മറ്റ് ചിത്രങ്ങളും നോക്കൂ. ആകൃതിയിൽ വ്യത്യാസമില്ലല്ലോ? എന്നാൽ വലുപ്പം മാറിയിട്ടുണ്ടുതാനും.

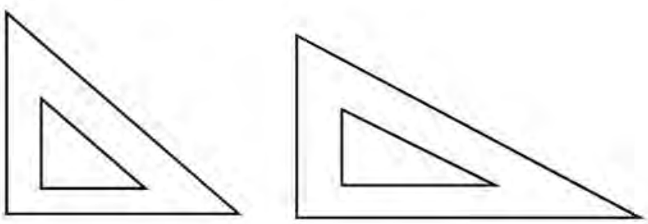


ഇവിടെയൊക്കെ രൂപങ്ങളെ ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കുകയോ ചെറുതാക്കുകയോ ചെയ്തിരിക്കുകയാണ്.

മേൽക്കൂരയ്ക്ക് അഴിയടിച്ചതു നോക്കൂ. ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണങ്ങൾ ഒരേപോലെ വലുതാകുന്നു.



ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ മട്ടങ്ങളും അവയുടെ ഉള്ളിലെ ദ്വാരത്തിന്റെ ആകൃതിയും ശ്രദ്ധിച്ചിരുന്നോ.

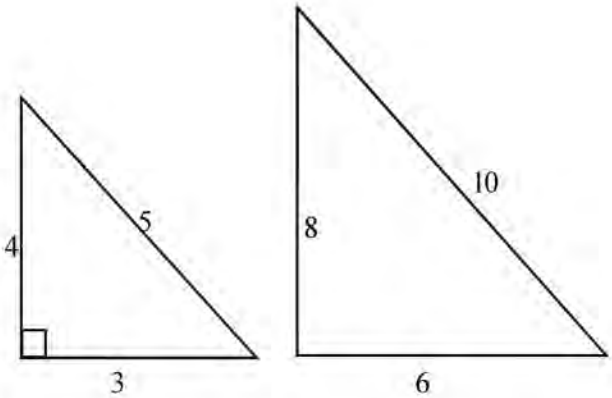


3cm, 4cm, 5cm വശങ്ങളുള്ള ഒരു ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ വശങ്ങൾ രണ്ട് മടങ്ങായ ത്രികോണവും വരച്ചു നോക്കൂ.

രണ്ടിന്റെയും കോണുകളുടെ പ്രത്യേകതയെന്താണ്?

വശങ്ങൾ 3 മടങ്ങായാലോ?

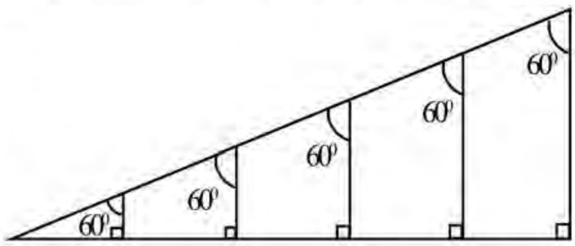
വശങ്ങൾ 10 മടങ്ങായാലോ?



എല്ലാ വശങ്ങളും ഒരേ തോതിൽ വർദ്ധിപ്പിക്കുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ നിശ്ചിത മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആയാലും കോണുകൾക്ക് മാറ്റമുണ്ടാകില്ല. മറിച്ച് കോണുകൾ മാറാതെ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചാൽ അവയുടെ വശങ്ങൾ ഒന്നാമത്തേതിന്റെ ഒരേ മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആയിരിക്കും.

ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളെ സദൃശത്രികോണങ്ങൾ എന്നാണ് പറയുക.

ചിത്രത്തിൽ കുത്തനെയുള്ള വരകൾ സമാന്തരങ്ങളാണല്ലോ. എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ പരസ്പരം തുല്യമായിരിക്കും.

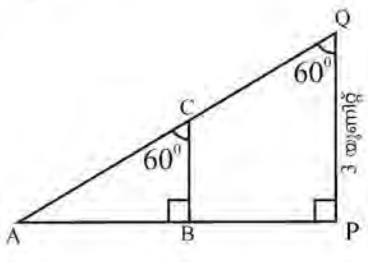


പക്ഷേ, വശങ്ങൾ നിശ്ചിത മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആയിരിക്കും.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾക്ക് തുല്യമായാൽ അവയുടെ തുല്യ കോണുകൾക്കെതിരായ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തുല്യമായിരിക്കും. അഥവാ വശങ്ങൾ ആനുപാതികമായിരിക്കും എന്നും പറയും.

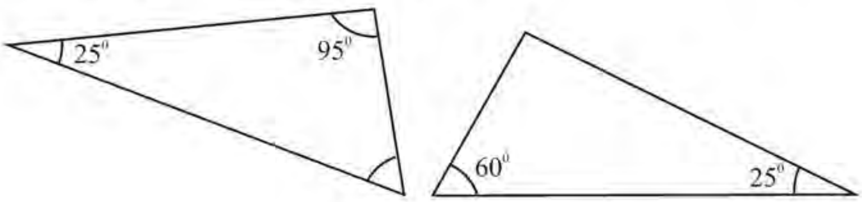
ത്രികോണം ABC യും APQ ഉം സദൃശങ്ങളാണ്.

$$\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$$

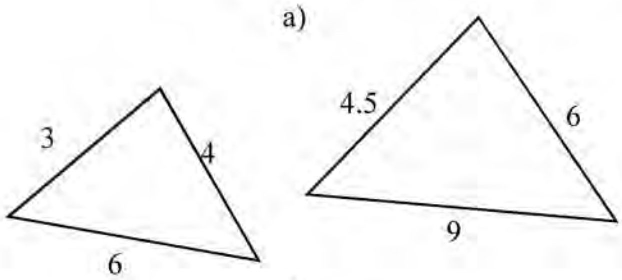


ചെയ്തുനോക്കാം

1) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. കാരണവും പറയുക.

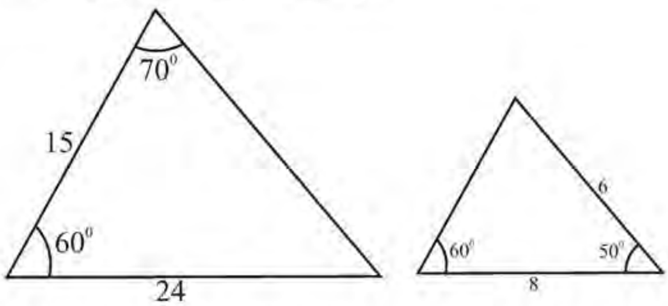


a)



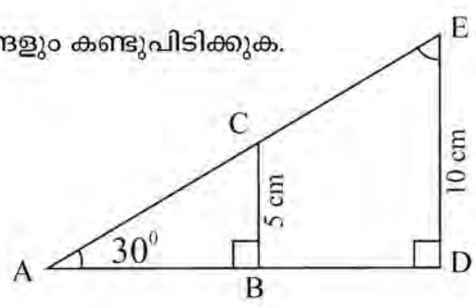
b)

2) ചുവടെ കൊടുത്ത രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളും സദൃശമാണെങ്കിൽ അവയുടെ മറ്റ് വശങ്ങളും കോണുകളും കണ്ടുപിടിക്കുക.



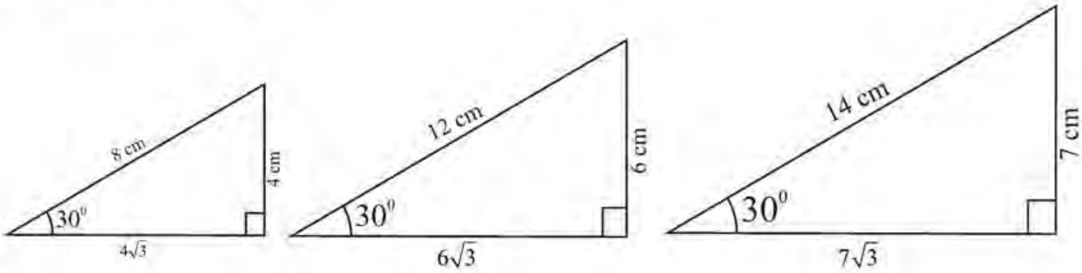
3) 1 മീറ്റർ നീളമുള്ള കുത്തനെ നിൽക്കുന്ന ഒരു കമ്പിന്റെ നിഴലിന് 3 മീറ്റർ നീളമുണ്ട്. അതേസമയത്ത് ഒരു ടവറിന്റെ നിഴലിന് 33 മീറ്റർ നീളമുണ്ടെങ്കിൽ ടവറിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

4) $\Delta ABC, \Delta ADE$ എന്നിവയുടെ മറ്റ് വശങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുക.



ത്രികോണമിതി

ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ



എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും 30^0, 60^0, 90^0 ത്രികോണങ്ങളാണല്ലോ?

എല്ലാത്തിലും 30^0 കോണിനെതിരെയുള്ള വശവും കർണവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം നോക്കൂ.

$$\frac{30^0 \text{ കോണിനെതിരായ വശം}}{\text{കർണം}} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

വശങ്ങൾ എത്ര ചെറുതായാലും വലുതായാലും 30^0, 60^0 മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഈ സ്ഥിരസംഖ്യയെ 30^0 കോണിന്റെ സൈൻ അളവ് എന്നാണ് പറയുക.

$$\sin 30^0 = \frac{30^0 \text{ കോണിന്റെ എതിർവശം}}{\text{കർണം}} \text{ എന്നെഴുതും}$$

$$\frac{30^0 \text{ കോണിന് സമീപത്തുള്ള വശം}}{\text{കർണം}} \text{ ആയാലോ?}$$

ഇത് $\frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{7\sqrt{3}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ എന്ന സ്ഥിരസംഖ്യയാണ് കിട്ടുന്നത്.

ഇതിനെ 30^0 യുടെ കൊസൈൻ അളവ് എന്നാണ് പറയുക.

അതായത് $\cos 30^0 = \frac{30^0 \text{ കോണിന്റെ സമീപവശം}}{\text{കർണം}}$ എന്നാണെഴുതുക.

$\frac{30^0 \text{ കോണിന്റെ എതിർവശം}}{30^0 \text{ കോണിന്റെ സമീപവശം}}$ എല്ലാ മട്ടത്രികോണങ്ങളിലും ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയായിരിക്കും.

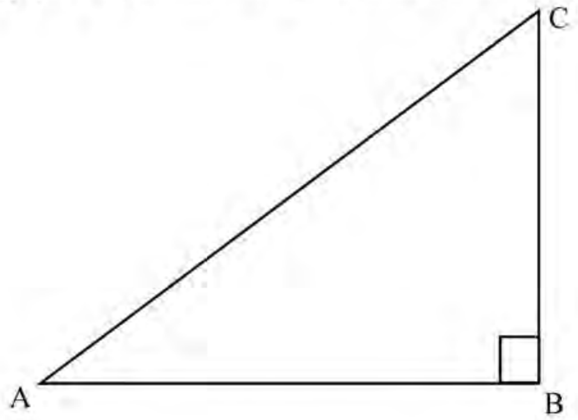
ഇവിടെ ആ സംഖ്യ $\frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{7}{7\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ എന്നാണ്.

ഇതിനെ 30^0 കോണിന്റെ ടാൻജന്റ് എന്നാണ് പറയുക.

ഇത് $\tan 30 = \dfrac{30^0 \text{ കോണിന്റെ എതിർവശം}}{30^0 \text{ കോണിന്റെ സമീപവശം}}$ എന്നെഴുതും.

ഇതുപോലെ $\sin 60^0, \cos 60^0, \tan 60^0$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

ഏത് കോണിന്റെയും സൈൻ, കോസ്, ടാൻ അളവുകൾ കണക്കാക്കാം, ആ കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന മട്ടത്രികോണം കിട്ടിയാൽ മതി.



$$\sin A = \frac{\angle A \text{ യുടെ എതിർവശം}}{\text{കർണം}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ യുടെ സമീപവശം}}{\text{കർണം}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ യുടെ എതിർവശം}}{\angle A \text{ യുടെ സമീപവശം}} = \frac{BC}{AB}$$

ഇതുപോലെ $\sin C, \cos C, \tan C$ എന്നിവ എഴുതിനോക്കൂ.

ചെയ്തുനോക്കാം

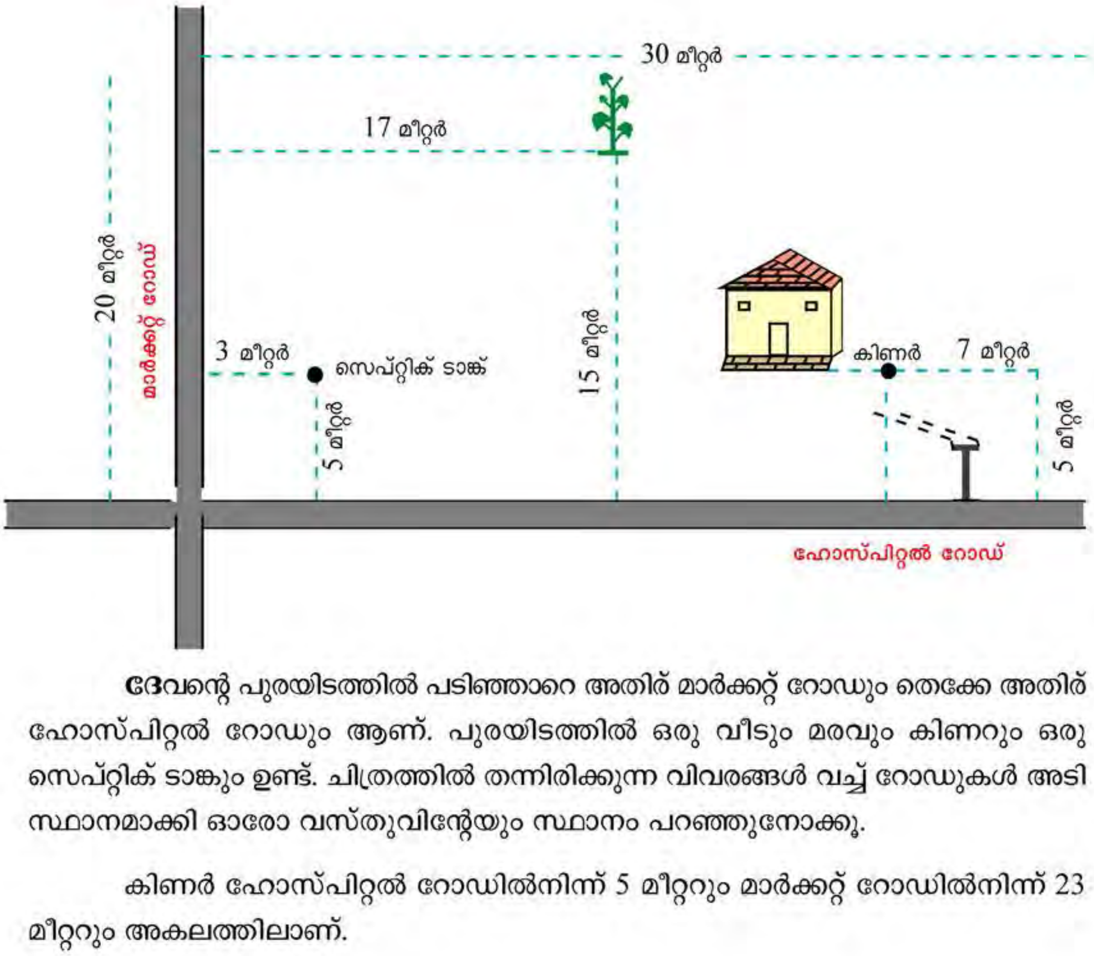
- $\sin 45^0, \cos 45^0, \tan 45^0$ എന്നിവ കണക്കാക്കുക.
- $\sin 40^0, \cos 40^0, \tan 40^0$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക. (40^0 കോണളവുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങൾ അളന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക)

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

- സർവസമത്രികോണങ്ങൾ, സദൃശത്രികോണങ്ങൾ ഇവ അവതരിപ്പിക്കുന്നു.
- ത്രികോണമിതി പരിചയപ്പെടുത്തുന്നു.
- സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും 30^0, 60^0, 90^0 കോണളവുകളുള്ള മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം മനസ്സിലാക്കുന്നു.

8 സൂചക സംഖ്യകൾ

സ്ഥാന നിശ്ചയം



ദേവന്റെ പുരയിടത്തിൽ പടിഞ്ഞാറെ അതിര് മാർക്കറ്റ് റോഡും തെക്കേ അതിര് ഹോസ്പിറ്റൽ റോഡും ആണ്. പുരയിടത്തിൽ ഒരു വീടും മരവും കിണറും ഒരു സെപ്റ്റിക് ടാങ്കും ഉണ്ട്. ചിത്രത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ വച്ച് റോഡുകൾ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഓരോ വസ്തുവിന്റേയും സ്ഥാനം പറഞ്ഞുനോക്കൂ.

കിണർ ഹോസ്പിറ്റൽ റോഡിൽനിന്ന് 5 മീറ്ററും മാർക്കറ്റ് റോഡിൽനിന്ന് 23 മീറ്ററും അകലത്തിലാണ്.

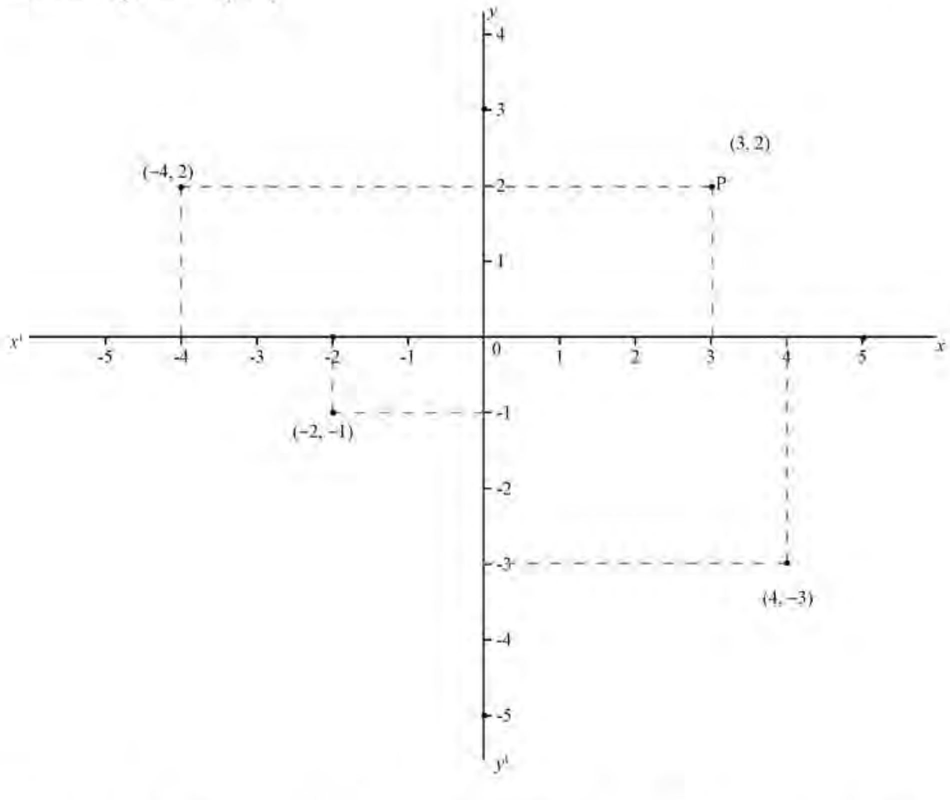
- മരത്തിന്റെ സ്ഥാനം
- സെപ്റ്റിക് ടാങ്കിന്റെ സ്ഥാനം
- ടാങ്കും കിണറും തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ്?

അക്ഷങ്ങളും ബിന്ദുക്കളും

റോഡുകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി പുരയിടത്തിൽ വസ്തുക്കളുടെ സ്ഥാനം നിർണയിച്ചതുപോലെ ഒരു പേപ്പറിൽ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം കൃത്യമായി അടയാളപ്പെടുത്തുവാൻ എന്തു ചെയ്യും? ഇവിടെ റോഡുകൾക്കു പകരം പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകൾ വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

ഈ രണ്ടു വരകളും മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ ആധാരബിന്ദു (origin) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

വിലങ്ങനെയുള്ള വരയെ x അക്ഷമെന്നും കുത്തനെയുള്ള വരയെ y അക്ഷമെന്നും പറയുന്നു.



x അക്ഷത്തിൽ 0' ത്തിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് തുല്യ അകലങ്ങളിൽ 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെയും 0' ത്തിന്റെ ഇടതുഭാഗത്ത് -1, -2, -3, ... എന്നിങ്ങനെയും എഴുതാം.

അതുപോലെ y അക്ഷത്തിൽ ഇതേ അകലത്തിൽ മുകളിലേക്ക് 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെയും താഴോട്ട് -1, -2, -3, ... എന്നിങ്ങനെയും എഴുതാം. യഥാർത്ഥത്തിൽ ഇവ രണ്ടും സംഖ്യാരേഖകൾ തന്നെയല്ലേ?

ചിത്രത്തിൽ P എന്ന ബിന്ദു, ആധാരബിന്ദുവിൽനിന്ന് 3 യൂണിറ്റ് വലത്തും 2 യൂണിറ്റ് മുകളിലും ആണ്. ഈ ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം (3, 2) എന്ന സംഖ്യാജോടി കൊണ്ടാണ് രേഖപ്പെടുത്തുന്നത്. 3 എന്ന സംഖ്യയെ P യുടെ x സൂചകസംഖ്യ എന്നും 2 എന്ന സംഖ്യയെ y സൂചകസംഖ്യ എന്നുമാണ് പറയുന്നത്.

മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ വിവിധ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതിയിരിക്കുന്നത് നോക്കി മനസ്സിലാക്കുമല്ലോ.

ചെയ്തുനോക്കാം

പേപ്പറിൽ x അക്ഷവും y അക്ഷവും വരച്ച് താഴെ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

- A (3, -2) • B (4, 2) • C (5, -1) • D (-5, -1)
- E (2, -3) • F (5, 0) • G (0, -1) • H (-5, 0)

അകലം

A (3, 0), B (5, 0) ആയാൽ A, B ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയായിരിക്കും?

ചിത്രത്തിൽ Aയിൽനിന്നും B ലേക്കുള്ള അകലം 2 യൂണിറ്റ് എന്നു കാണാമല്ലോ.

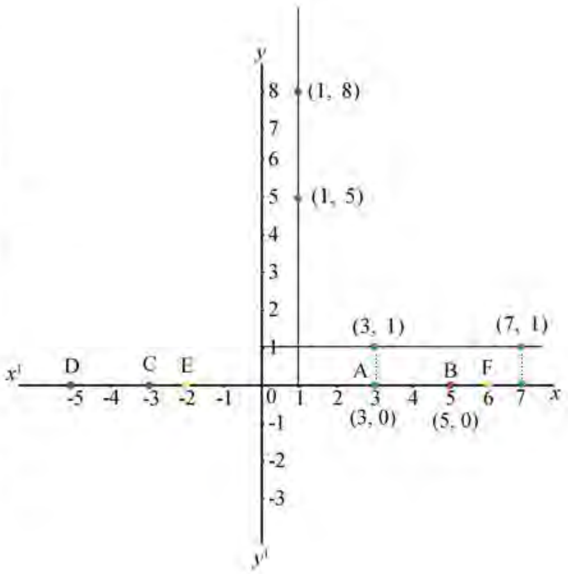
(-3, 0), (-5, 0) തമ്മിലുള്ള അകലവും 2 യൂണിറ്റ് തന്നെ.

(-2, 0), (6, 0) തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ്?

ഇവിടെ ആധാരബിന്ദുവിന്റെ ഇരുഭാഗങ്ങളിലുമായാണ് ബിന്ദുക്കൾ. ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും (-2, 0) ത്തിലേക്ക് അകലം 2യൂണിറ്റ്, ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും (6, 0) ത്തിലേക്ക് 6 യൂണിറ്റ്.

അപ്പോൾ ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം $= 2 + 6 = 8$ യൂണിറ്റ്

(3, 1), (7, 1) ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കാമോ?



x അക്ഷവും y അക്ഷവും വരച്ച് ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. ഈ ബിന്ദുക്കൾ x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ വരയിലാണല്ലോ. ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം $(3, 0)$, $(7, 0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം തന്നെ. അതായത് x സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം തന്നെ..

$(1, 5)$, $(1, 8)$ ഇവ തമ്മിലോ?

ഈ ബിന്ദുക്കൾ y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ വരയിലാണല്ലോ.

അകലം കാണാൻ y സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം കണ്ടാൽ മതിയല്ലോ.

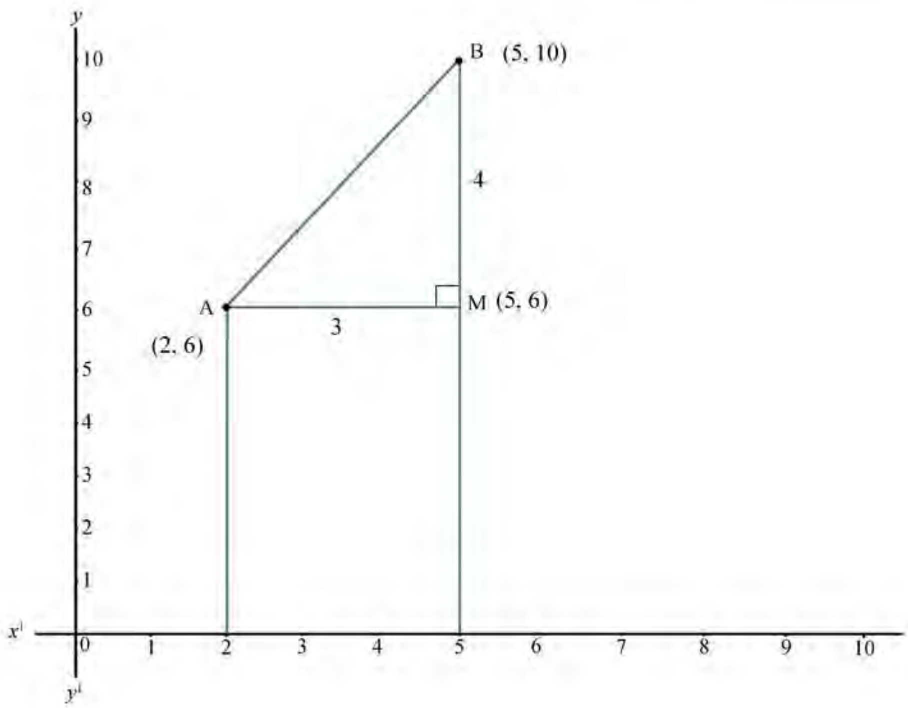
ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അവയുടെ x സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്.

y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അവയുടെ y സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്.

അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമല്ലാത്ത ഒരു വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എങ്ങനെ കാണാം?

ഉദാഹരണമായി A (2, 6), B (5, 10) ആയാൽ AB യുടെ നീളം കാണണം.



AMB എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ

AB = $\sqrt{AM^2+MB^2}$ ആണല്ലോ. M ന്റെ x സൂചകസംഖ്യ B യുടെ x സൂചകസംഖ്യയും Mന്റെ y സൂചകസംഖ്യ A യുടെ y സൂചകസംഖ്യയുമായിരിക്കും.

M ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (5, 6) ആയിരിക്കും.

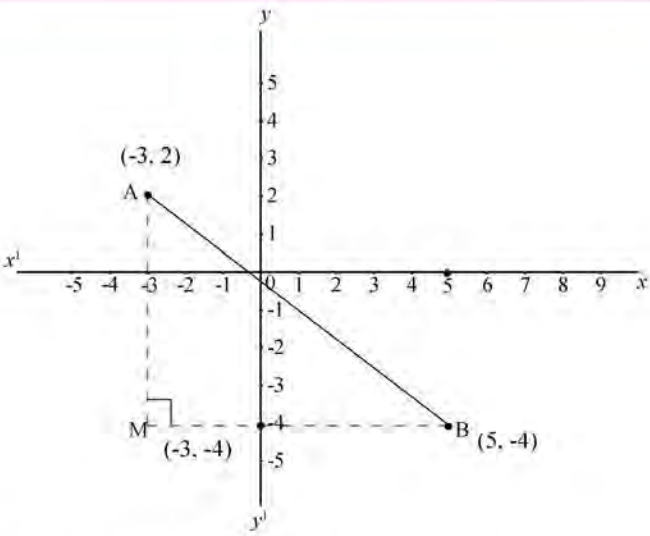
AM = (2, 6), (5, 6) ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം = 3 യൂണിറ്റ്

MB = (5, 6), (5, 10) ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം = 4 യൂണിറ്റ്

$AB=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ യൂണിറ്റ്

മറ്റൊരുദാഹരണം നോക്കാം.

A (-3, 2), B (5, -4) ആയാൽ AB യുടെ നീളം അഥവാ ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കുക.



M ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (-3, -4)

AM ന്റെ നീളം y അക്ഷത്തിലെ 2, -4 ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം 6 യൂണിറ്റ്.

MB യുടെ നീളം x അക്ഷത്തിലെ -3, 5 ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം = 8 യൂണിറ്റ്.

പൈഥാഗറസ് തത്വം ഉപയോഗിച്ച്

AB = $\sqrt{AM^2+MB^2}$ = $\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ യൂണിറ്റ്

ഈ രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങളും പരിശോധിച്ചാൽ ചിത്രം വരയ്ക്കാതെതന്നെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണാനുള്ള മാർഗം കിട്ടുമല്ലോ.

ബിന്ദുക്കളുടെ x സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗവും y സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗവും കൂട്ടിയതിന്റെ വർഗമൂലം കണ്ടാൽ മതി.

അതായത്, രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള

അകലം = $\sqrt{(x \text{ സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം})^2 + (y \text{ സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം})^2}$

ബിന്ദുക്കൾ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ആയാൽ അവ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(1, 4), (2, 7) ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുക.

x സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം = 2 - 1 = 1

y സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം = 7 - 4 = 3

അകലം = $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ യൂണിറ്റ്

(-2, 1), (-5, 6) ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുക.

x സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം = -2, - 5 ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം = 3

y സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം = 6, 1 ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം = 5

(-2, 1), (-5, 6) ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം = $\sqrt{3^2 + 5^2}$

$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ യൂണിറ്റ്

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങൾ (-3, 5), (2, -6) ആയാൽ ആരം കണക്കാക്കുക.

A (-3, 5), B (2, -6)

x സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം = x അക്ഷത്തിലെ -3 ഉം 2 ഉം തമ്മിലുള്ള അകലം = 5

y സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം = y അക്ഷത്തിലെ 5 ഉം -6 ഉം തമ്മിലുള്ള അകലം = 11

അകലം= $\sqrt{5^2 + 11^2} = \sqrt{25+121} = \sqrt{146}$ യൂണിറ്റ്.

ആരം $= \frac{\sqrt{146}}{2}$ യൂണിറ്റ്

ചെയ്തുനോക്കാം

1) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ A (2, 2), B (8, 3), C (7, 9), D (1, 8) ആണ്.

   a) ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ കാണുക.

   b) ചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ കാണുക.

2) (2, 1) കേന്ദ്രമായി വരച്ച വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് (5, 5)

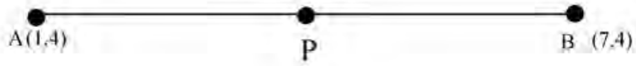
   a) ഈ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

   b) (-1, -3) ഈ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

മധ്യബിന്ദു

x അക്ഷവും y അക്ഷവും വരച്ച് (1, 4), (7, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഈ വരയുടെ കൃത്യം നടുക്ക് വരുന്ന ബിന്ദു (മധ്യബിന്ദു)വിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തായിരിക്കും?

A (1, 4), B (7, 4) എന്നും മധ്യബിന്ദു P എന്നും സൂചിപ്പിച്ചാൽ

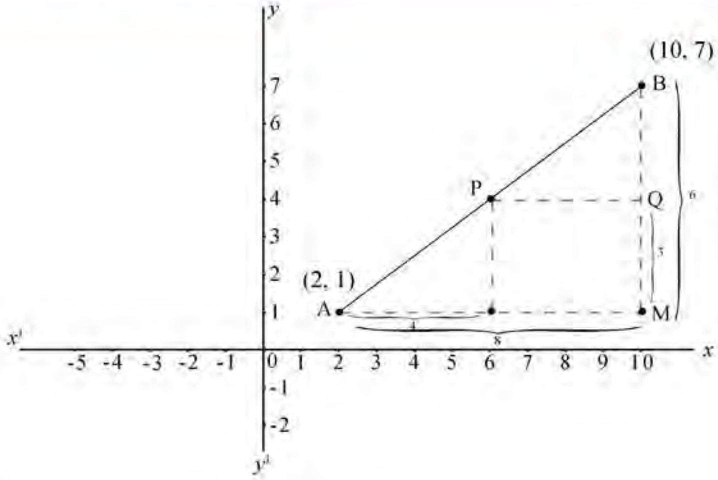


(1, 4) ൽനിന്ന് (7, 4) ലേക്ക് എത്ര യൂണിറ്റ് അകലമുണ്ട്?

6 യൂണിറ്റ് ആണല്ലോ. അതിന്റെ പകുതി അകലം 3 യൂണിറ്റ്. (1, 4) ൽനിന്ന് 3 യൂണിറ്റ് അകലത്തിൽ ഈ വരയിലെ ബിന്ദു ഏതാണ്? (4, 4) അപ്പോൾ AB യുടെ മധ്യബിന്ദു P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (4, 4).

- (5, 1), (5, 9) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തൂ.

A (2, 1), B (10, 7) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?



A യുടെ x സൂചകസംഖ്യ 2. B യുടേത് 10.

A യിൽനിന്ന് 8 യൂണിറ്റ് വിലങ്ങനെ വലത്തോട്ടും തുടർന്ന് 6 യൂണിറ്റ് കുത്തനെ മുകളിലേക്കും നീങ്ങിയാൽ B യിലെത്തും. അപ്പോൾ A യിൽനിന്ന് 4 യൂണിറ്റ് വിലങ്ങനെ വലത്തോട്ടു നീങ്ങി (6,1) ൽ എത്തി. തുടർന്ന് 3 യൂണിറ്റ് കുത്തനെ മുകളിലോട്ട് നീങ്ങി (6, 4) ൽ എത്തിയാൽ AB യുടെ മധ്യബിന്ദു കിട്ടും. അതുകൊണ്ട് P യുടെ സൂചകസംഖ്യ $(2 + 4, 1 + 3) = (6, 4)$.

ചിത്രം വരയ്ക്കാതെ ആലോചിച്ചാലോ?

2 ൽനിന്ന് 10 ലേക്ക് അകലം 8 യൂണിറ്റ്, ഈ അകലത്തിന്റെ പകുതി 4 യൂണിറ്റ്.

മധ്യബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ = A യുടെ x സൂചകസംഖ്യ + 4

= 2 + 4 = 6 യൂണിറ്റ്

ഇതുപോലെ ഒന്നിൽനിന്നും ഏഴിലേക്കുള്ള അകലം 6 യൂണിറ്റിന്റെ പകുതി 3 യൂണിറ്റ്.

മധ്യബിന്ദുവിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ = A യുടെ y സൂചകസംഖ്യ + 3

= 1 + 3 = 4 യൂണിറ്റ്

A(2, 7), B(6, 9) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

2 ൽനിന്നും 6 ലേക്കുള്ള അകലം 4 ന്റെ പകുതി 2.

7 ൽനിന്ന് 9 ലേയ്ക്ക് അകലം 2 ന്റെ പകുതി 1.

മധ്യബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ = A യുടെ x സൂചകസംഖ്യ + 2

= 2 + 2 = 4 യൂണിറ്റ്

y സൂചകസംഖ്യ = A യുടെ y സൂചകസംഖ്യ + 1

$= 7 + 1 = 8$

മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (4, 8)

(-1, 4), (6, 9) ആയാലോ

x സൂചകസംഖ്യ	*y സൂചകസംഖ്യ*
-1 ൽനിന്ന് 6 ലേക്ക് അകലം 7	4 ൽനിന്ന് 9 ലേയ്ക്ക് അകലം 5
7 ന്റെ പകുതി $3\frac{1}{2}$	5 ന്റെ പകുതി $2\frac{1}{2}$
$-1 + 3\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$	$4 + 2\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$

മധ്യബിന്ദു $\left(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളെല്ലാം പരിശോധിച്ചാൽ ഒരു കാര്യം കൂടി വ്യക്തമാണ്. വരയുടെ അറ്റങ്ങളിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ x സൂചകസംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ പകുതിയാണ് മധ്യബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ. അതുപോലെ y സൂചകസംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ പകുതിയാണ് മധ്യബിന്ദുവിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ.

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ആയാൽ AB യുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ

സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

ചെയ്തുനോക്കാം

- A (4, 1), B (6, 8) ആയാൽ AB യുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഒരു വൃത്തത്തിൽ വരച്ചിരിക്കുന്ന വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (5, 3), (9, 11) ഇവയാണ്. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
- AB എന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് P. A യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (-2, 3), Pയുടേത് (1, 7) എങ്കിൽ B യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

വരയുടെ ചരിവ്

A (1, 3), B (9, 15) ഇവ യോജിപ്പിച്ച വര AB പരിഗണിക്കുക.

AB യുടെ മധ്യബിന്ദു P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

x സൂചകസംഖ്യ $= \frac{1+9}{2} = 5$

y സൂചകസംഖ്യ $= \frac{3+15}{2} = 9$

P (5, 9)

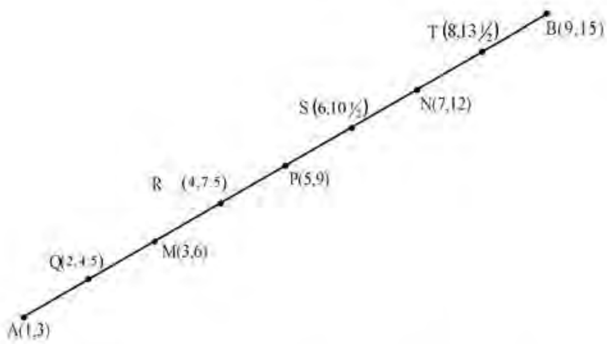
AP യുടെ മധ്യബിന്ദു M, PB യുടെ മധ്യബിന്ദു N

ഇവയുടെ സൂചകസംഖ്യകളും കണ്ടെത്തൂ.

തുടർന്ന് AM ന്റെ മധ്യബിന്ദു Q, MP യുടെ മധ്യബിന്ദു R ഇവയുടേയും സൂചക സംഖ്യകൾ കാണാമല്ലോ.

AB വരച്ച് ഈ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കാം.

PN ന്റെ മധ്യബിന്ദു S, NB യുടെ മധ്യബിന്ദു T ഇവയും അടയാളപ്പെടുത്താം.



A, Q, M, R, P, S, N, T, B ഇവയെല്ലാം ഒരേ വരയിൽ ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളാണല്ലോ.

ഇവയുടെ x സൂചകസംഖ്യകൾ നോക്കൂ.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

y സൂചകസംഖ്യകളോ

$3, 4\frac{1}{2}, 6, 7\frac{1}{2}, 9, 10\frac{1}{2}, 12, 13\frac{1}{2}, 15$

ഒരു വരയിൽ തുല്യ അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ അവയുടെ x സൂചക സംഖ്യകൾ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലാണ്. ഇവയുടെ y സൂചകസംഖ്യകളും ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലാണ്.

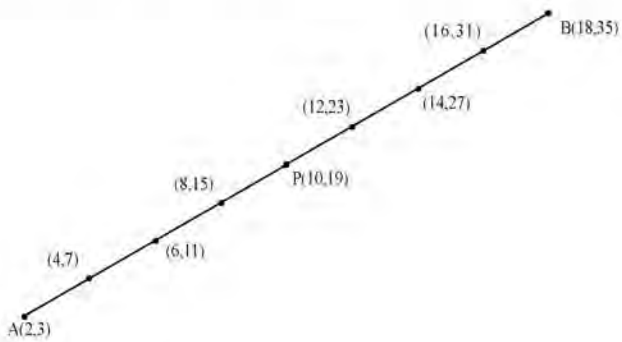
ഈ വര അൽപ്പം കൂടി നീട്ടി വരച്ചാൽ x സൂചകസംഖ്യ 10 ആയ ബിന്ദുവിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ എന്തായിരിക്കും?

x സൂചകസംഖ്യ 1 കൂടുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ $1\frac{1}{2}$ കൂടുന്നു. അതിനാൽ $x = 10$ ആയാൽ,

$y = 15 + 1\frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$ ആയിരിക്കും.

(2, 3), (18, 35) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര നോക്കാം.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഇതേ വരയിലുള്ള ഏതാനും ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ച് എഴുതി നോക്കൂ.



ഈ വരയിലെ തുല്യ അകലത്തിലുള്ള ഏതാനും ബിന്ദുക്കൾ എടുത്തപ്പോൾ x സൂചകസംഖ്യ 2 കൂടുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ 4 കൂടുന്നു എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

x സൂചകസംഖ്യകളിലെ വർദ്ധനവിന്റെ ഇരട്ടിയാണ് y സൂചകസംഖ്യകളുടെ വർദ്ധന എന്നും കാണാം. x വ്യത്യാസമെന്നത് വിലങ്ങനെയുള്ള മാറ്റവും, y വ്യത്യാസ മെന്നത് കുത്തനെയുള്ള മാറ്റവുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ y വ്യത്യാസത്തെ x വ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, വിലങ്ങനെയുള്ള മാറ്റത്തിനനുസരിച്ച് കുത്തനെയുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ്. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ

ഒരു വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള y സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തെ x സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസംകൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ വരയുടെ ചരിവ് എന്നു പറയുന്നു.

അതായത്, രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ആയാൽ അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ആയിരിക്കും.

ചെയ്തുനോക്കാം

1) താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കുക.

a. (5, 6), (9, 4) b. (1, 3), (5, 9)

c. (2, 1), (3, 0) d. (4, 1), (3, 2)

2) (1, 3), (2, 5) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

3) (1, 4), (3, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര (5, 7) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമോ? കാരണമെന്ത്?

4) (2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ചരിവ് 1 ആയ വരയിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

5) (-2, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ചരിവ് $\frac{1}{2}$ ആയ വരയിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

- പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു രേഖകളിൽനിന്നുള്ള അകലം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്താൻ കഴിയുന്നു. സൂചക സംഖ്യകൾ എന്ന ആശയത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ധാരണ നേടുന്നു.
- രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ അറിഞ്ഞാൽ അവ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കാൻ കഴിയുന്നു. ഈ ധാരണ വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കാൻ ശേഷി നേടുന്നു.
- രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്താൻ കഴിയുന്നു.
- സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കാൻ കഴിയുന്നു.

സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം

9

ഒരു സാക്ഷരതാകേന്ദ്രത്തിന്റെ പത്താംതരം തുല്യതാ പഠിതാക്കളുടെ സംഭാഷണം ശ്രദ്ധിച്ചാലോ? ''ഇന്നത്തെ പത്രം വായിച്ചോ? സംസ്ഥാനത്ത് ഇന്നും നാളെയും അതിശക്തമായ മഴയ്ക്കുള്ള സാധ്യത ഉണ്ടത്രേ!'' വസന്ത പറഞ്ഞു. അപ്പോൾ മഞ്ജു പറഞ്ഞു ''അതേ ഞാനും കണ്ടു. കനത്ത കാറ്റിനും സാധ്യത ഉണ്ടത്രെ''.

ഈ പഠിതാക്കളുടെ സംഭാഷണത്തിൽ ആവർത്തിച്ചുവരുന്ന ഒരു പദമാണ് സാധ്യത.

നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിൽ ഏതെല്ലാം മേഖലകളിൽ സാധ്യത പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നുവെന്ന് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രം കണ്ട് മനസ്സിലാക്കാമല്ലോ!

നമുക്ക് ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കിയാലോ.

ഒരു പെട്ടിയിൽ 9 ചുവന്ന പന്തുകളും ഒരു കറുത്ത പന്തുമുണ്ട്. ഇതിൽനിന്നും നോക്കാതെ ഒരു പന്തെടുത്താലോ? മിക്കവാറും ചുവപ്പാകും. എന്നാൽ കറുപ്പായിക്കൂടായ്കയില്ല. മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ ആറു ചുവന്ന പന്തുകളും നാലു കറുത്ത പന്തുകളു

മുണ്ടെങ്കിൽ, ഇതിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താലോ? അപ്പോഴും കൂടുതലും പന്തു ചുവന്നതാകാനാണ് വഴി.

മൂന്നാമതൊരു പെട്ടിയിൽ അഞ്ചു ചുവന്ന പന്തുകളും അഞ്ചു കറുത്ത പന്തുകളുമാണെന്നിരിക്കട്ടേ! ഇതിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താലോ? ചുവന്നതുമാകാം, കറുത്തതുമാകാം, അല്ലേ? ഇതെല്ലാം മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാലോ? ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും പെട്ടിയിൽനിന്നും ചുവന്നത് കിട്ടാനാണ് കൂടുതൽ സാധ്യത. എന്നാൽ മൂന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽനിന്നും ചുവന്നതാകാനും കറുത്തതാകാനും ഒരേ സാധ്യതയാണ്.

ചായക്കടയിലെ സാധ്യത

മനുവും ഉണ്ണിയും മധുരപ്രിയരാണ്. നടക്കാനിറങ്ങിയപ്പോൾ വഴിവക്കിൽ ജോസഫേട്ടന്റെ ചായക്കടയിൽ കയറി.

''പാൽപേടയുണ്ടോ ചേട്ടാ?'' മനു ചോദിച്ചു.

ഒരു തളികയിൽ 18 ക്രീം നിറത്തിലെ പേടയും 12 ഇളം തവിട്ടു നിറത്തിലെ പേടയും 15 ചോക്കലേറ്റ് പേടയും അവരുടെ മുന്നിലെത്തി. വർത്തമാനത്തിന്റെ ഇടയിൽ മനു തളികയിലേക്ക് നോക്കാതെ ഒരു പേടയെടുത്തു. ഇത് ചോക്കലേറ്റ് പേടയാകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

തളികയിൽ ആകെ 45 പേടയാണുള്ളത്. ഇതിൽ 15 എണ്ണം ചോക്കലേറ്റ് പേടയാണ്. മനു എടുത്ത പേട ചോക്കലേറ്റ് ആകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{15}{45}$ ആയിരിക്കും.

മനു ചോക്കലേറ്റ് പേട എടുത്തതിനു ശേഷം ഉണ്ണിക്ക് ക്രീം നിറത്തിലെ പേട കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

മനു ഒരു ചോക്കലേറ്റ് പേട എടുത്തുകഴിഞ്ഞാൽ ബാക്കി 44 പേടയല്ലെ ഉള്ളൂ. അപ്പോൾ ക്രീം നിറത്തിലെ പേട കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{18}{44}$.

മാളുവിന്റെ കുടുക്ക

മാളുവിന് പിറന്നാളിന് ഇത്തവണ അച്ഛൻ സമ്മാനമായി നൽകിയത് ഒരു കുടുക്കയാണ്. അതിൽ ഓരോ ദിവസവും 1 രൂപ വീതവും കൂടാതെ ഒന്നിടവിട്ട ദിവസങ്ങളിൽ 2 രൂപ വീതവും ഇടാനാണ് അച്ഛൻ മാളുവിനോട് പറഞ്ഞത്. അങ്ങനെ

അവൾ കുടുക്കയിൽ നാണയത്തുട്ടുകൾ ശേഖരിക്കാൻ തുടങ്ങി. ഒരു മാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ അവൾ കുടുക്ക തുറന്ന് നാണയങ്ങൾ എണ്ണിയപ്പോൾ 30 ഒരുരൂപ നാണയങ്ങളും 15 രണ്ടു രൂപ നാണയങ്ങളും ഉണ്ടായിരുന്നു. അവൾ നാണയത്തുട്ടുകളെല്ലാം തിരിച്ച് കുടുക്കയിലാക്കുന്നതിനിടയിൽ ഒരു നാണയം കട്ടിലിനടിയിൽ വീണു. എങ്കിൽ അത് രണ്ടു രൂപയാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ആകെയുള്ള നാണയങ്ങളുടെ എണ്ണം 45 ആണ്. അതിൽ രണ്ട് രൂപ നാണയങ്ങൾ 15 എണ്ണമാണ്. എങ്കിൽ താഴേക്കു വീണ നാണയം രണ്ടു രൂപയാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{15}{45}$ ആയിരിക്കും.

ഇനി മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം

1 മുതൽ 30 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഓരോ കടലാസു കഷണത്തിലെഴുതി ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇതിൽനിന്നൊരു കടലാസ് എടുത്തു. കടലാസിലെ സംഖ്യ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ആകെയുള്ള 30 സംഖ്യകളിൽ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതങ്ങളാകുന്നത് 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 എന്നിവയാണ്. ഇവയുടെ എണ്ണം 10 ആയതിനാൽ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതമാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{10}{30}$ ആയിരിക്കും.

എന്നാൽ പത്തിന്റെ ഗുണിതമാകാനുള്ള സാധ്യതയോ? പത്തിന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ 10, 20, 30 ആയതിനാൽ ഇതിനുള്ള സാധ്യത $\frac{3}{30}$ ആയിരിക്കും.

മൂന്നിന്റെയോ പത്തിന്റെയോ ഗുണിതമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

മൂന്നിന്റെയോ പത്തിന്റെയോ ഗുണിതങ്ങളാകുന്ന സംഖ്യകൾ 3, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 22, 27, 30 എന്നതിനാൽ, സാധ്യത $\frac{12}{30}$ എന്നായിരിക്കും.

മൂന്നിന്റെയും പത്തിന്റെയും ഗുണിതമാകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

ചെപ്പും മുത്തും

ചെപ്പും മുത്തും വച്ചൊരു കളിയായാലോ; ഒരു ചെപ്പിൽ ഒരേ വലുപ്പമുള്ള അഞ്ചു കറുത്ത മുത്തും അഞ്ചു വെളുത്ത മുത്തും. മറ്റൊന്നിൽ ഒരേ വലുപ്പമുള്ള ആറു കറുത്ത മുത്തും നാലു വെളുത്ത മുത്തും. ഏതെങ്കിലുമൊരു ചെപ്പിൽനിന്ന് നോക്കാതെ ഒരു മുത്തെടുക്കണം. കറുത്തതായാൽ കളി ജയിച്ചു. ഏതു ചെപ്പിൽനിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്?

ഒന്നാം ചെപ്പ് : 5 കറുത്തത് 5 വെളുത്തത്
രണ്ടാം ചെപ്പ് : 6 കറുത്തത് 4 വെളുത്തത്

രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിലാണ് കറുത്ത മുത്തുകൾ കൂടുതലുള്ളത്. അപ്പോൾ അതിലല്ലേ കറുത്തത് കിട്ടാൻ സാധ്യത കൂടുതൽ?

ഇനി രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നൊരു കറുത്ത മുത്തെടുത്ത് ഒന്നാം ചെപ്പിലിട്ടെന്നിരിക്കട്ടെ!

ചെപ്പുകളിലുള്ള മുത്തുകളുടെയെണ്ണം ഇങ്ങനെയാകും.

ഒന്നാം ചെപ്പ് : 6 കറുത്തത് 5 വെളുത്തത്
രണ്ടാം ചെപ്പ് : 5 കറുത്തത് 4 വെളുത്തത്

ഇനി കളിയിൽ ജയിക്കാൻ ഏതു ചെപ്പിൽനിന്നെടുക്കണം? ഇപ്പോൾ ഒന്നാം ചെപ്പിലാണ് കറുത്ത മുത്തു കൂടുതൽ. അപ്പോൾ കറുപ്പു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യതയും ഇതിലാണോ? നമുക്കു നോക്കാം.

ഒന്നാം ചെപ്പിൽ മൊത്തം 11 മുത്തുകളുണ്ട്. അതിൽ 6 കറുത്തത്. അതായത്, മൊത്തം മുത്തിന്റെ $\frac{6}{11}$ ഭാഗം കറുത്തത്.

രണ്ടാം ചെപ്പിലോ? മൊത്തം മുത്തിന്റെ $\frac{5}{9}$ ഭാഗമാണ് കറുത്തത്.

$\frac{6}{11}, \frac{5}{9}$ ഇവയിലേതാണു വലുത്?

$\frac{5}{9}$ അല്ലേ? അതായത് രണ്ടാം ചെപ്പിലാണ് കൂടുതൽ ഭാഗം കറുത്തത്. അപ്പോൾ രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നുതന്നെ മുത്തെടുക്കുന്നതല്ലേ ഇപ്പോഴും നല്ലത്?

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നാണ് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യത.

ചെയ്തുനോക്കാം

1) ഒരു ചെപ്പിൽ 3 ചുവന്ന മുത്തുകളും 7 പച്ച മുത്തുകളുമുണ്ട്. ഇതിൽനിന്നൊരു മുത്തെടുത്താൽ അത് പച്ചയാകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

2) ഒരു പെട്ടിയിൽ 5 വെള്ളയും 4 ചുവപ്പും 6 പച്ചയും പന്തുകളുമുണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ അത് പച്ചയാകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും? ചുവപ്പോ വെള്ളയോ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

3) ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാൻ ആവശ്യപ്പെട്ടു. പറയുന്ന സംഖ്യ പൂർണവർഗമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

4) 1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഓരോ കടലാസു കഷണങ്ങളിലെഴുതി ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇതിൽനിന്നൊരു കടലാസ് എടുക്കുമ്പോൾ, കടലാസിലെ സംഖ്യ അഞ്ചിന്റെ ഗുണിതമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

5) ഒരു സഞ്ചിയിൽ ഒരേ വലുപ്പമുള്ള 3 ചുവപ്പും 7 പച്ചയും പന്തുകളുണ്ട്. മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ അതേ വലുപ്പമുള്ള 8 ചുവപ്പും 7 പച്ചയും പന്തുകളുമുണ്ട്.

   a) ആദ്യത്തെ സഞ്ചിയിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ അത് ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

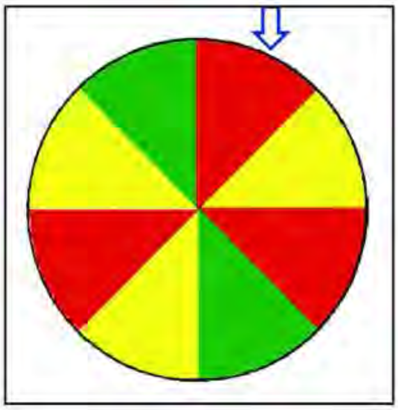
   b) രണ്ടാമത്തെ സഞ്ചിയിൽനിന്നെടുത്താലോ?

   c) രണ്ടു സഞ്ചിയിലെയും പന്തുകൾ ഒരു സഞ്ചിയിലാക്കി അതിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ അതു ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

6) 1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഓരോ കടലാസു കഷണങ്ങളിലെഴുതി ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽനിന്നൊരു കടലാസെടുക്കണം. കടലാസിലെ സംഖ്യ അഭാജ്യസംഖ്യയാകാനാണോ അതോ 5ന്റെ ഗുണിതമാവാനാണോ കൂടുതൽ സാധ്യത.

ജ്യാമിതീയ സാധ്യത

ഒരു വട്ടം എട്ടു തുല്യഭാഗങ്ങളായി തിരിച്ച് നിറം കൊടുത്ത് കറങ്ങാൻ പാകത്തിൽ ഒരു പലകയിൽ തറച്ചിരിക്കുന്നു. വട്ടം കറങ്ങി നിൽക്കുമ്പോൾ അമ്പടയാളത്തിന് നേരെ ചുവന്നനിറം വരാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

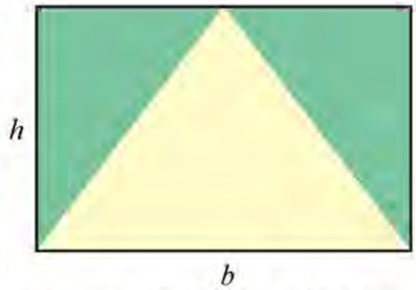


വട്ടം കറങ്ങി നിൽക്കുമ്പോൾ അമ്പടയാളത്തിനു നേരെ വട്ടത്തിന്റെ എട്ടു ഭാഗങ്ങളിൽ ഏതും വരാം. അതിൽ മൂന്നെണ്ണമാണ് ചുവപ്പ്. അതായത് മൊത്തം ഭാഗത്തിന്റെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗം ചുവപ്പാണ്. അപ്പോൾ അമ്പടയാളത്തിനു നേരെ ചുവന്നനിറം വരാനുള്ള സാധ്യതയും $\frac{3}{8}$ ആയിരിക്കും.

ഇതുപോലെ മറ്റു നിറങ്ങൾ ഓരോന്നും വരാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

രസകരങ്ങളായ ചില കളികൾ നോക്കാം

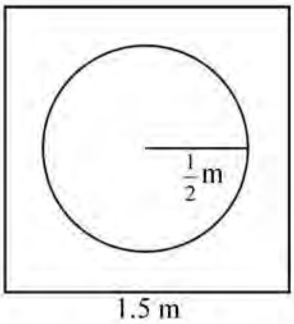
കട്ടിക്കടലാസിൽ ഒരു ചതുരം വെട്ടിയെടുത്ത്, അതിന്റെ ഒരുവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും എതിർവശത്തിന്റെ മൂലകളും ചേർത്തൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാം. ഈ ചതുരത്തിൽ കണ്ണടച്ച് ഒരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് ത്രികോണത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?



ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ b യും h ഉം ആയാൽ പരപ്പളവ് bh ഉം, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}bh$ ഉം ആണല്ലോ? അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗമാണ് ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. ആയതിനാൽ കുത്ത് ത്രികോണത്തിന്റെ അകത്താകാനുള്ള സാധ്യതയും $\frac{1}{2}$ തന്നെ.

ചെയ്തുനോക്കാം

1) 1.5 മീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കളിസ്ഥലത്തിന്റെ മധ്യത്തിൽ $\frac{1}{2}$ മീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ചിരിക്കുന്നു. സമചതുരത്തിന്റെ വെളിയിൽ, തിരിഞ്ഞുനിന്ന് അമ്മു ഒരു കല്ല് സമചതുരത്തിനുള്ളിലേയ്ക്ക് എറിയുന്നു. ഇത് വൃത്തത്തിന്റെ അകത്ത് വീഴാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?



2) തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കളെയും യോജിപ്പിച്ച് ഒരു സമചതുരം വരച്ചിട്ടുണ്ട്. വലിയ സമചതുരത്തിൽ കണ്ണടച്ചൊരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് ഉള്ളിലെ സമചതുരത്തിലാകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

ജോടികൾ

ഒരു നാണയത്തിന് രണ്ടു മുഖങ്ങൾ ആണല്ലോ? നാണയത്തിന്റെ മൂല്യത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന അക്കം വരുന്നമുഖത്തെ T എന്നും മറുഭാഗത്തെ H എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കാം. നാണയം കറക്കിയിടുമ്പോൾ മുകൾവശം വരുന്നത് ഒന്നുകിൽ H അല്ലെങ്കിൽ T ആയിരിക്കും.

രണ്ടു നാണയങ്ങൾ കറക്കിയിടുമ്പോൾ മുകൾ വശം രണ്ടും H ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും? മുകൾവശത്ത് കാണുന്നവയെ നമുക്ക് ഒരു പട്ടികയിലെഴുതി നോക്കാം.

	മുകൾ വശത്ത് കാണുന്നവ			
നാണയം 1	H	H	T	T
നാണയം 2	H	T	H	T

ഇവയെ നമുക്കു ജോടികളായി ഇങ്ങനെ എഴുതാം. ആദ്യത്തെ നാണയത്തിന്റെ മുകൾവശവും രണ്ടാമത്തെ നാണയത്തിന്റെ മുകൾവശവും H ആണെങ്കിൽ, ഇവയെ ചേർത്ത് (H, H) എന്ന് ജോടിയായി എഴുതാം.

ഇതുപോലെ ആകെ കിട്ടുന്ന ജോടികൾ (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) എന്നിവയല്ലെ.

ആകെ 4 ജോടികൾ. ഇതിൽ എത്രയെണ്ണത്തിലാണ് രണ്ടും H വരുന്നത്?

(H, H) എന്ന ജോടി മാത്രമല്ലേ? അപ്പോൾ രണ്ട് നാണയങ്ങൾ കറക്കിയിടുമ്പോൾ മുകൾവശം രണ്ടും H ആകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{4}$.

ഇതുപോലെ രണ്ടും T ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

ഒരു 'H' ഉം ഒരു T യും വരാനുള്ള സാധ്യതയോ?

മറ്റൊരു കണക്കുകൂടി നോക്കാം

ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നിങ്ങനെ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാല് കടലാസു കഷണങ്ങളും മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ മൂന്നു കടലാസുകഷണങ്ങളും ഉണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ. രണ്ടിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ ഏതൊക്കെയാകാം?

ആദ്യത്തെ പെട്ടിയിൽനിന്ന് 1 എന്നെടുത്താൽ, രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3 ഇവ ഓരോന്നും ചേർത്ത് മൂന്നു ജോടികൾ ഇതുപോലെ എഴുതാം. (1, 1), (1, 2), (1, 3).

ഇതുപോലെ ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽനിന്ന് ഓരോ സംഖ്യയായെടുത്ത് കിട്ടാവുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ എല്ലാം എഴുതിയാലോ?

(1, 1), (1, 2), (1, 3)

(2, 1), (2, 2), (2, 3)

(3, 1), (3, 2), (3, 3)

(4, 1), (4, 2), (4, 3)

ആകെ 12 ജോടികൾ.

രണ്ടു സംഖ്യകളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

ആദ്യത്തെ സംഖ്യ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയേക്കാൾ കൂടുതലാകാനുള്ള സാധ്യത എന്തായിരിക്കും?

ചെയ്തുനോക്കാം

1) 2, 3, 4 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ എഴുതിയെന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ സംഖ്യയിൽ രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ആ രണ്ടക്കസംഖ്യയുടെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 7 നെക്കാൾ കൂടുതലാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?
2) മിനിക്ക് പച്ച, നീല, ചുവപ്പ് എന്നീ നിറങ്ങളിൽ കല്ലുമാലയും കമ്മലുമുണ്ട്. എത്ര രീതിയിൽ മിനിക്ക് മാലയും കമ്മലുമണിയാം? ഒരുദിവസം മിനി ഒരേ നിറമുള്ള മാലയും കമ്മലും അണിയാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? വ്യത്യസ്ത നിറമുള്ളതോ?

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

- സാധ്യതയെ സംഖ്യയായി വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.
- വിവിധ സന്ദർഭങ്ങളിൽ സാധ്യത കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.

10 സ്തൂപികകൾ

ചിത്രം നോക്കൂ.

ഇതിൽ കുറെ എണ്ണം നാം നേരത്തെ പരിചയപ്പെട്ട രൂപങ്ങളാണല്ലോ?

എന്നാൽ മുകൾഭാഗം കൂർത്ത മുനയുള്ളതും താഴെ ഭാഗം വൃത്താകൃതിയോ ചതുരമോ ഒക്കെ ആയിട്ടുള്ള ചില രൂപങ്ങൾ ശ്രദ്ധിച്ചോ?

അവ മാത്രമായുള്ള ചിത്രങ്ങൾ നോക്കാം.

ഇതുപോലുള്ള രൂപങ്ങൾ സ്തംഭങ്ങൾ എന്ന പാഠത്തിലെ കെട്ടിടത്തിന്റെ ചിത്രങ്ങളിലും കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ? ഈ രൂപങ്ങൾ സ്തംഭങ്ങളിൽനിന്നും എങ്ങനെ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

ഇവയ്ക്കു ഒരു പാദമുഖമേ ഉള്ളൂ. മറ്റേ അഗ്രം ഒരു കൂർത്ത മുനയാണ്. പിന്നെ പാർശ്വമുഖങ്ങളും. പാദം ചതുരമോ സമചതുരമോ ത്രികോണമോ മറ്റേതെങ്കിലും ബഹുഭുജമോ വൃത്തമോ ഒക്കെ ആകാം. പാർശ്വമുഖങ്ങൾ ത്രികോണങ്ങളോ വളഞ്ഞ മുഖമോ ആണ്. ഇത്തരം രൂപങ്ങളെ സ്തൂപികകൾ (Pyramids) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. കൂർത്ത അഗ്രത്തെ സ്തൂപികയുടെ ശീർഷം (Apex) എന്നും പറയുന്നു.

സ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള മറ്റു ചില വസ്തുക്കൾ നോക്കൂ.

പലവിധം സ്തൂപികകൾ

പലതരം സ്തംഭങ്ങൾ നാം കണ്ടുകഴിഞ്ഞു. സ്തംഭങ്ങൾക്ക് പേരുകൾ നൽകിയത് അവയുടെ അഗ്രമുഖത്തിന്റെ ആകൃതിക്കനുസരിച്ച് ആണല്ലോ?

ഇവിടെയും അങ്ങനെതന്നെ. പാദമുഖം സമചതുരമാണെങ്കിൽ സമചതുര സ്തൂപിക, പഞ്ചഭുജമാണെങ്കിൽ പഞ്ചഭുജസ്തൂപിക, വൃത്തമാണെങ്കിൽ വൃത്തസ്തൂപിക. ചിലതിനെ കുറിച്ച് അൽപ്പം കൂടുതൽ പഠിക്കാം.

സമചതുര സ്തൂപിക

ചിത്രത്തിൽ ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയും അത് ഉണ്ടാക്കാൻ കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത രൂപവും കണ്ടില്ലേ?

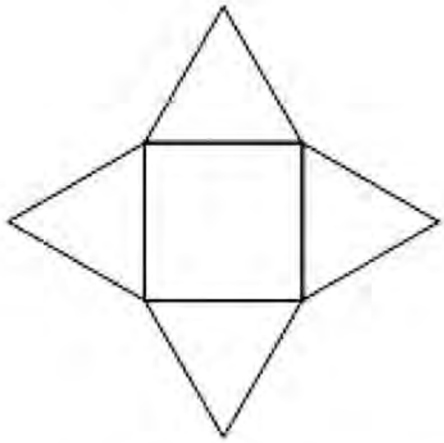
നിങ്ങളും അതുപോലെ ഒന്ന് വെട്ടിയെടുത്ത് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി നോക്കൂ.

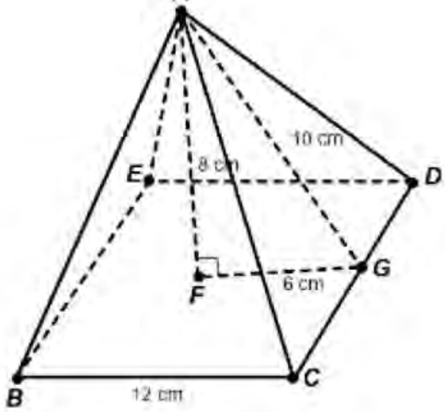
സമചതുര സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ നിങ്ങൾ മുറിച്ചെടുത്തത്, ഒരു സമചതുരവും ഒരുപോലെയുള്ള 4 ത്രികോണങ്ങളുമാണല്ലോ?

ഇവിടെ ചില ആലോചനകൾ നല്ലതാണ്. ത്രികോണങ്ങൾക്ക് എന്തെങ്കിലും പ്രത്യേകത ഉണ്ടോ? ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളും സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളും തമ്മിൽ ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ബന്ധമുണ്ടോ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

ഇത്തരത്തിൽ ഒരു രൂപം വെട്ടിയെടുത്ത് ഒരു സമചതുര സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ സാധിക്കുമോ? ഏതു വലിപ്പത്തിൽ ത്രികോണം എടുത്താലും സമചതുര സ്തൂപിക കിട്ടുമോ?





ഇവിടെ ഒരു സമചതുരവും 4 സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങളും ഉണ്ടല്ലോ? അവ ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കിയ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഓരോ മുഖങ്ങളും അവയുടെ അളവുകളും ഒന്ന് നോക്കാം.

സമചതുരത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്നും സ്തൂപികയുടെ ശീർഷത്തിലേക്കുള്ള അകലത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം ആയി കണക്കാക്കുന്നു. ചിത്രത്തിൽ AF സ്തൂപികയുടെ ഉയരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അത് 8 സെന്റിമീറ്റർ ആകുന്നു.

A യിൽ നിന്നും CD യുടെ മധ്യബിന്ദുവായ G യിലേക്കുള്ള അകലമോ? അത് പാദവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്നും ശീർഷത്തിലേക്കുള്ള അകലമാണ്. ഈ അകലത്തെ സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം എന്ന് പറയുന്നു. ഇത് ഒരു പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ ഉയരം കൂടിയാണ്.

ചിത്രത്തിൽ സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം 10 സെന്റിമീറ്റർ ആകുന്നു.

മറ്റ് ചില നീളങ്ങൾ കൂടി നോക്കൂ.

AB, AC, AD, AE എന്നീ വരകളുടെ നീളങ്ങളോ?

ഇവ നാലും പാദത്തിന്റെ മൂലയിൽനിന്നും ശീർഷത്തിലേക്കുള്ള അകലമാണ്. ഈ വക്കുകളെ പാർശ്വവക്കുകൾ എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ്

സമചതുരസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കൂടാരം നോക്കൂ.
ഈ കൂടാരത്തിന്റെ ചരിവുയരം 5 മീറ്ററും പാദവശത്തിന്റെ നീളം 6 മീറ്ററും ആണ്.
ഇത് ഉണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ ക്യാൻവാസിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?

കാൻവാസിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നു പറയുന്നത് ഇവിടെ സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവാണ്.

പാർശ്വമുഖങ്ങളെല്ലാം ഒരേ വലുപ്പമായതിനാൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ട് 4 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതി.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = $\frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ് = $4 \times 15 = 60$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

ഇവിടെ ക്യാൻവാസിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിച്ച മാർഗം ഒന്നു കൂടി നോക്കാം.

പാദത്തിന്റെ നീളത്തെ ചരിവുയരംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചു, ഇതിന്റെ പകുതിയെ 4 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചു.

പാദനീളം 'a' യും ചരിവുയരം 'l' ഉം ആയാൽ, പരപ്പളവ് കാണാൻ

$$\frac{1}{2} \times a \times l \times 4$$

അൽപ്പം മാറ്റി ഇങ്ങനെയും പറയാം.

$$\frac{1}{2} \times 4a \times l = \frac{1}{2} \times \text{പാദചുറ്റളവ്} \times \text{ചരിവുയരം.}$$

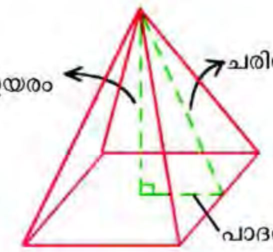
സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കാണുവാൻ പാദ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയെ ചരിവുയരംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതി.

ഇനി കൂടാരത്തിന്റെ ഉയരവും പാദവശത്തിന്റെ നീളവും തന്നാൽ ഇത് ഉണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ ക്യാൻവാസിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കാണാം.

ആദ്യം ചരിവുയരം കണക്കാക്കണം.

ചരിവുയരം, ഉയരം, പാദത്തിന്റെ പകുതി എന്നീ 3 നീളങ്ങൾ ചേർന്ന് ഒരു മട്ടത്രികോണം ഉണ്ടാക്കുന്നുണ്ടല്ലോ?

ഇതിൽ ചരിവുയരം കർണ്ണവും, ലംബവശങ്ങളിൽ ഒന്ന് സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവും, മറ്റേതു പാദവക്കിന്റെ പകുതി നീളവും ആകുന്നു.



അപ്പോൾ ഉയരത്തിന്റെ വർഗവും പാദവക്കിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗവും കൂട്ടിയാൽ ചരിവുയരത്തിന്റെ വർഗം കിട്ടും.

അതുകൊണ്ട് ഈ മൂന്നെണ്ണത്തിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണം അറിഞ്ഞാൽ മൂന്നാമത്തേത് കണ്ടുപിടിക്കാം.

ചരിവുയരം l ഉം, ഉയരം h ഉം, പാദം a യും ആയാൽ

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$ ആയിരിക്കും.

കൂടാരത്തിന്റെ ഉയരം 4 മീറ്ററും പാദവശത്തിന്റെ നീളം 6 മീറ്ററും ആണ്. ഇത് ഉണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ ക്യാൻവാസിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?

ഉയരം 4, പാദവക്കിന്റെ നീളം 6 ആകയാൽ,

ചരിവുയരം $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

അതുകൊണ്ടു പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 5 = 60$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ചെയ്തുനോക്കാം

1) ഏതാനും സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ ഉയരം, ചരിവുയരം, പാദവക്ക് എന്നിവയിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ അളവുകൾ തന്നിട്ടുണ്ട്. മൂന്നാമത്തെ അളവ് കണക്കാക്കുക.

പാദവക്ക്	ഉയരം	ചരിവുയരം
12	8	--------
8	3	--------
--------	24	25
10	--------	13
--------	60	61

2) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 120 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററും ആകുന്നു. പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ് കാണുക.

3) സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഒരു പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 25 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ ആണ്. എങ്കിൽ സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ് എത്ര?

4) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം 18 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്.

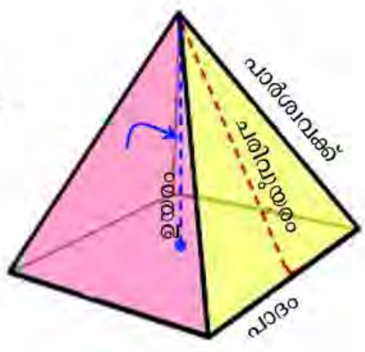
   a) ചരിവുയരം എന്ത്? *b)* പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ് എന്ത്?

5) ക്യാൻവാസ് കൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കിയ സമചതുരസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കൂടാരം ഉണ്ട്. അതിന്റെ ഉയരം 8 മീറ്റർ, പാദവക്കിന്റെ നീളം 12 മീറ്റർ. കൂടാരം ഉണ്ടാക്കിയ ക്യാൻവാസിന്റെ പരപ്പളവ് എന്ത്?

വീണ്ടുമൊരു മട്ടത്രികോണം

ചിത്രം നോക്കൂ.

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വവക്ക്, ചരിവുയരം, പാദത്തിന്റെ പകുതി എന്നിവ ചേർന്നും ഒരു മട്ടത്രികോണം ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഇവിടെ കർണ്ണമായി വരുന്നത് പാർശ്വവക്ക് ആണ്.



അതുകൊണ്ട് ഈ മൂന്നെണ്ണത്തിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണം അറിഞ്ഞാൽ മൂന്നാമത്തേത് കണ്ടുപിടിക്കാം.

പാർശ്വവക്ക് e യും, ചരിവുയരം l ഉം, പാദം a യും

ആയാൽ $e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ആയിരിക്കും

ഏതാനും സമചതുര സ്തൂപികകളുടെ പാർശ്വവക്ക്, ചരിവുയരം, പാദവക്ക് എന്നിവയിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ അളവുകൾ തന്നിട്ടുണ്ട്. മൂന്നാമത്തെ അളവ് കണക്കാക്കുക.

പാദവക്ക്	ചരിവുയരം	പാർശ്വവക്ക്
14	24	--------
18	40	--------
--------	12	13
24	--------	20

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക 4 തുല്യ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളും ഒരു സമചതുരവും ചേർന്നതാണ്. ഇവ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്നത് ഈ മുഖങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയായിരിക്കുമല്ലോ?

അതായത് പാർശ്വമുഖപരപ്പളവും പാദപരപ്പളവും ചേർന്നതാണ് ഉപരിതല പരപ്പളവ്.

സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ വെട്ടിയെടുത്തത് കണ്ടല്ലോ? ഇത് ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് കണ്ടുനോക്കാം.

പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} \times 16 \times 6 = 48$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

പാദപരപ്പളവ് $= 4 \times 4 = 16$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ഉപരിതല പരപ്പളവ് $= 48 + 16 = 64$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ചെയ്തുനോക്കാം

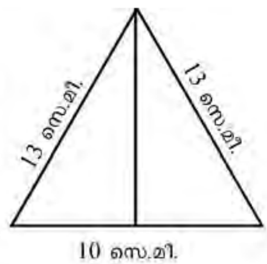
1) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ് 200 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയാൽ ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്?

2) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം 18 സെന്റിമീറ്റർ, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ,

   a) പാദപരപ്പളവ് എന്ത്?

   b) പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ് എന്ത്?

   c) ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്?



3) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണം ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്.

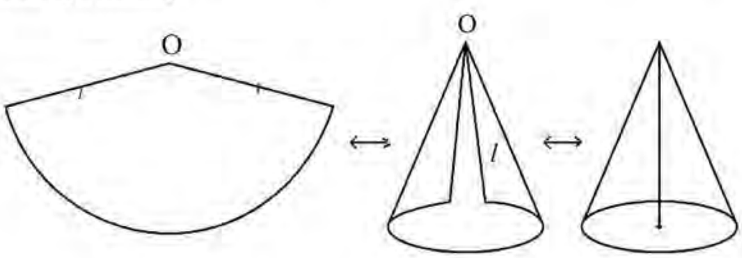
   a) ചരിവുയരം എന്ത്? *b)* ഉപരിതലപരപ്പളവ് എന്ത്?

4) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം 14 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 24 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്.

   a) ചരിവുയരം എന്ത്? *b)* ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്?

വൃത്തസ്തൂപിക

ഒരു വൃത്തം മുറിച്ചെടുത്ത് അതിൽനിന്നും ആദ്യ ചിത്രത്തിലേതു പോലെ ഒരു രൂപം മുറിച്ചെടുക്കുക. അത് വളച്ച് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കൂ.



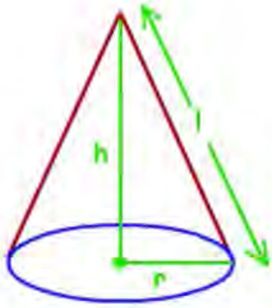
വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണല്ലോ സ്തൂപികയുടെ ശീർഷമായി വന്നത്.

വൃത്തത്തിന്റെ ആരമോ?

അത് സ്തൂപികയുടെ ശീർഷത്തിൽനിന്നും പാദത്തിലേക്കുള്ള അകലമായി മാറി. അതായതു ചരിവുയരമായി മാറി.

സ്തൂപികയുടെ ഉയരമോ?

അത് ശീർഷത്തിൽനിന്നും പാദമുഖമായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള അകലം തന്നെ.



ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

ഇവിടെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം, ചരിവുയരം, ആരം എന്നിവ ചേർന്ന് ഒരു മട്ടത്രികോണം ആയതു കാണുന്നില്ലേ?

അപ്പോൾ ചരിവുയരത്തിന്റെ വർഗം, ഉയരത്തിന്റെയും ആരത്തിന്റെയും വർഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.

ചരിവുയരം l, ഉയരം h, ആരം r എന്നിങ്ങനെ ആയാൽ $l^2 = h^2 + r^2$ ആകുന്നു.

ഏതാനും വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ഉയരം, ചരിവുയരം, ആരം എന്നിവയിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ അളവുകൾ തന്നിട്ടുണ്ട്. മൂന്നാമത്തെ അളവ് കണക്കാക്കുക.

ഉയരം h	ആരം h	ചരിവുയരം l
7	24	--------
12	5	--------
40	--------	41
--------	11	61

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖപരപ്പളവ്

ഈ കൂടാരം നോക്കൂ. ഏകദേശം വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലല്ലേ?

ഈ കൂടാരം നിർമ്മിക്കാനുപയോഗിച്ച ക്യാൻവാസിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കാണാം?

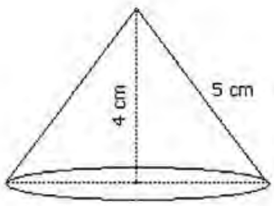
ക്യാൻവാസിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നത് സ്തൂപികയുടെ വക്രമുഖപരപ്പളവാണല്ലോ ?

അതുകൊണ്ടു വക്രമുഖപരപ്പളവ് കണ്ടാൽ മതി. അതിനെന്താണ് മാർഗം?

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ് കാണാൻ ഉപയോഗിച്ച മാർഗം തന്നെ ഇവിടെയും ഉപയോഗിക്കാം.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രമുഖപരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} \times$ പാദചുറ്റളവ് $\times$ ചരിവുയരം.

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചില അളവുകളാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇതിന്റെ വക്രമുഖപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.



ആരം = 3 cm

പാദചുറ്റളവ് $= 2 \times \pi \times r$

$= 2 \times \pi \times 3$

$= 6\pi$

വക്രമുഖപരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} \times 6\pi \times 5$

$= 15\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ചെയ്തുനോക്കാം

1) ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 30π സെന്റിമീറ്റർ, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്റർ. വക്രമുഖപരപ്പളവ് എന്ത്?

2) ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് 100π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, ഉയരം 24 സെന്റിമീറ്റർ.
   a) ചരിവുയരം എന്ത്?
   b) വക്രമുഖപരപ്പളവ്?

3) വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തൊപ്പിയുടെ വ്യാസം 22 സെന്റിമീറ്റർ, ചരിവുയരം 61 സെന്റിമീറ്റർ. ഇത്തരം 40 തൊപ്പികൾ ഉണ്ട്. ഇവയുടെയെല്ലാം വക്രമുഖം വർണക്കടലാസ് കൊണ്ട് പൊതിയണമെങ്കിൽ ചുരുങ്ങിയത് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്റർ കടലാസ് വേണ്ടിവരും? ഒരു ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 125 രൂപ നിരക്കിൽ എന്ത് ചെലവ് വരും?

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

വൃത്തസ്തൂപികയ്ക്ക് വക്രമുഖം കൂടാതെ ഒരു പാദമുഖം മാത്രമല്ലേ ഉള്ളൂ. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഈ രണ്ടു മുഖങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകളുടെ തുകയായിരിക്കും ഉപരിതല പരപ്പളവ്.

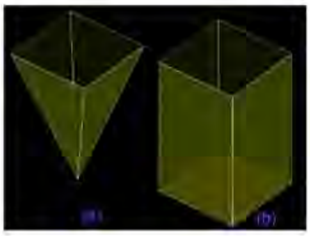
ചെയ്തുനോക്കാം

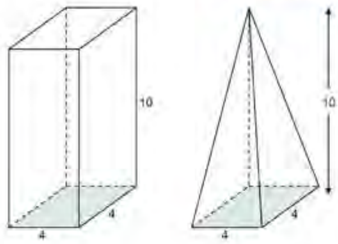
1) ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദആരം 9 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 40 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്?
2) വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ പാദആരം 18 സെന്റി മീറ്റർ, ഉയരം 24 സെന്റിമീറ്റർ ആകുന്നു. ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്?
3) ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് 314 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ, ചരിവുയരം 26 സെന്റിമീറ്റർ ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്ത്?

സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

പുഴയോരത്ത് മണൽ കൂട്ടിയിരിക്കുന്നത് കണ്ടപ്പോൾ സുമേഷിന് ഒരു സംശയം. ഇത് എത്ര ക്യൂബിക് മീറ്റർ മണലുണ്ടാകും. എങ്ങനെ കണക്ക് കൂട്ടാം?

അതിനു മുൻപ് ഇത് ഒന്ന് നോക്കൂ.





ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമുള്ള ഒരു സമചതുരസ്തംഭവും ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയും ആണ്.

ഇതുപോലെ ഒരു ജോടി ചാർട്ട് പേപ്പറിൽ വെട്ടിയെടുത്ത്, സമചതുര സ്തൂപികയിൽ നിറയെ മണൽ കോരി സ്തംഭത്തിലേക്കു ഇട്ടുനോക്കൂ.

എന്ത് ബന്ധമാണ് കാണാൻ കഴിയുന്നത്?

മൂന്ന് തവണ ഇട്ടപ്പോൾ സ്തംഭം നിറഞ്ഞല്ലോ?

ഇതിൽ നിന്നും എന്ത് മനസ്സിലാക്കാം?

സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ് സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം.

സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം = പാദപരപ്പളവ് × ഉയരം ആണല്ലോ?

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം = $\frac{1}{3}$ × പാദപരപ്പളവ് × ഉയരം.

ഇനി മണലിന്റെ അളവ് കാണാമല്ലോ.

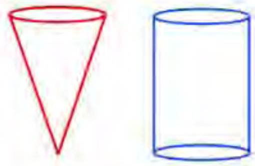
സമചതുരസ്തൂപികാകൃതിയിൽ കണ്ട മണലിന്റെ പാദമുഖത്തിന്റെ നീളം 6 മീറ്ററും ഉയരം 5 മീറ്ററും ആണ്.

എങ്കിൽ എത്ര ക്യൂബിക് മീറ്റർ മണലുണ്ടാകുമെന്നു കണ്ടുനോക്കൂ.

മണലിന്റെ അളവ് = $\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 5$

= 60 ഘനമീറ്റർ

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം



ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരേ ഉയരവും ഒരേ ആരവും ഉള്ള വൃത്തസ്തംഭവും വൃത്തസ്തൂപികയുമാണ്. ഇവിടെയും സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ് സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എന്ന് നേരത്തേ ചെയ്തതുപോലുള്ള പ്രവർത്തനത്തിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം = $\frac{1}{3}$ × പാദപരപ്പളവ് × ഉയരം

ചെയ്തുനോക്കാം

- ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം 12 സെന്റിമീറ്റർ, ചരിവുയരം 10 സെന്റിമീറ്റർ. വ്യാപ്തം കാണുക.
- വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിൽ കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന നെൽക്കൂമ്പാരത്തിന്റെ പാദപരപ്പളവ് 2826 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. ഇതിന്റെ ഉയരം 15 സെന്റിമീറ്ററും ആകുന്നു. വ്യാപ്തം എന്ത്?
- 30 സെന്റിമീറ്റർ പാദആരമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന് 50 സെ.മി. ഉയരമുണ്ട്. ഇതിൽനിന്നും ചെത്തിയുണ്ടാക്കാവുന്ന പരമാവധി വലിപ്പമുള്ള വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എന്ത്?
- ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയ്ക്ക് 15 സെ.മി. ഉയരവും 9 സെ.മി. പാദ ആരവും ഉണ്ട്. ഇതിന്റെ വ്യാപ്തം എന്ത്?

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

- സമചതുരസ്തൂപിക, വൃത്തസ്തൂപിക എന്നിവയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ്, വ്യാപ്തം എന്നിവ മനസ്സിലാക്കുന്നു.

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക് 11

ഏഴാം ക്ലാസിലെ തുല്യത പാഠപുസ്തകത്തിലെ ശരാശരി ഒന്നു വായിച്ചു നോക്കുക. കുറച്ചുകൂടി വ്യത്യസ്തമായ ഒരു സന്ദർഭത്തിൽ ശരാശരി കണ്ടുപിടിക്കുന്ന തെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. വിവരങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ പല വിഭാഗങ്ങളായി തിരിച്ചു പട്ടികയാക്കുന്ന രീതിയും ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ.

വിഭാഗപ്പട്ടികകൾ

ഒരു കൃഷിയിടത്തിൽനിന്നു കിട്ടിയ തേങ്ങ മുഴുവനും ഭാരമനുസരിച്ചു തരംതിരിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഭാരം (ഗ്രാമിൽ)	എണ്ണം
1200-1400	30
1000-1200	55
800-1000	35
600-800	30

തേങ്ങയുടെ ശരാശരി ഭാരം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

ഇവിടെ ഓരോ തേങ്ങയുടെയും ഭാരം കൃത്യമായി തന്നിട്ടില്ല. തേങ്ങയുടെ ആകെ ഭാരം കിട്ടിയാൽ മാത്രമേ ശരാശരി ഭാരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ പറ്റുകയുള്ളൂ. പട്ടികയിലെ ആദ്യത്തെ വരിയിൽ തന്നിട്ടുള്ള 30 തേങ്ങയുടെ ഭാരം 1200 ഗ്രാമിനും 1400 ഗ്രാമിനും ഇടയിലെന്നു തന്നിരിക്കുന്നു. അപ്പോൾ ഇവയുടെ ശരാശരി ഭാരവും ഈ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ വരണമല്ലോ. അതുകൊണ്ട്

ഇവയുടെ ശരാശരി ഭാരം 1200-1400 വിഭാഗത്തിന്റെ കൃത്യം നടുക്കു (മധ്യം) വരുന്ന 1300 ആയി സങ്കൽപ്പിക്കാം. അതുപോലെതന്നെ മറ്റു വരികളിലുമുള്ള ശരാശരി എടുത്താൽ പട്ടിക ഇങ്ങനെ മാറുന്നതായി കാണാം.

ഭാരം (ഗ്രാമിൽ)	എണ്ണം	വിഭാഗ മധ്യം	ആകെ ഭാരം
1200-1400	30	1300	39000
1000-1200	55	1100	60500
800-1000	35	900	31500
600-800	30	700	21000

ഇനി ശരാശരി ഭാരം കണക്കാക്കാം.

ശരാശരി ഭാരം $= \frac{39000+60500+31500+21000}{150} = 1013$

അപ്പോൾ നമുക്ക് എന്താണു കിട്ടിയത്. ഈ കൃഷിയിടത്തിലെ ഒരു തേങ്ങയുടെ ശരാശരി ഭാരം 1013 ഗ്രാം ആണ്. വളരെ വലിയ സംഖ്യാശേഖരത്തിൽനിന്ന്, അവയുടെ ഏകദേശ സ്വഭാവത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചില സംഖ്യകൾ ഉണ്ട്. ഇവ കണക്കാക്കാൻ പല രീതികളുണ്ട്. ആകെ തുകയെ എണ്ണംകൊണ്ടു ഹരിക്കുക എന്നതു അവയിൽ ഒന്നു മാത്രമാണ്. ഇത്തരം സംഖ്യകളെയാണു ശരാശരി (Average) എന്നു വിളിക്കുന്നത്. സാധാരണ ശരാശരിയെ അതായത്, ആകെ തുകയെ എണ്ണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ മാധ്യം (Arithmetic Mean) എന്നും പറയാറുണ്ട്.

ചെയ്തുനോക്കാം

1. താഴെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ സംഖ്യയും മാധ്യമായി വരുന്ന 2 വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകൾ പത്തിനും ഇരുപതിനും ഇടയിലായി കണ്ടുപിടിക്കുക.

   a) 14 *(b)* 17

2. ഒരു തുല്യത ക്ലാസിലെ പഠിതാക്കളുടെ ഉയരം സൂചിപ്പിക്കുന്ന പട്ടികയാണു താഴെ കാണുന്നത്.

ഉയരം	പഠിതാക്കളുടെ എണ്ണം
150-154	6
154-158	4
158-162	5
162-166	3
166-168	2

ഇവരുടെ മാധ്യ ഉയരം എത്രയാണ്?

3. അഴിമുഖം തീരപ്രദേശത്തെ 260 കുടുംബങ്ങളുടെ പ്രതിമാസവരുമാനമാണ് താഴെ പട്ടികയിൽ കാണുന്നത്.

വരുമാനം (രൂപ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
5000-10000	24
10000-15000	40
15000-20000	79
20000-25000	51
25000-30000	28
30000-35000	26
35000-40000	12

ഇവിടത്തെ മാധ്യവരുമാനം എത്രയായിരിക്കും?

ശരിയല്ലാത്ത ശരാശരി

ഒരു കോളനിയിൽ താമസിക്കുന്ന 10 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം ഇങ്ങനെയാണ്.

16500	21700	18600	21050	19500
17000	21000	18000	22000	17500

ഇക്കൂട്ടത്തിന്റെ മാധ്യവരുമാനം എത്രയാണ്?

വരുമാനമെല്ലാം കൂട്ടി, 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, മാധ്യം 19285 രൂപയെന്നു കിട്ടും.

ഇനി ഇവരുടെ ഓരോരുത്തരുടെയും വരുമാനത്തിനു പകരം, മാധ്യമായ സംഖ്യ മാത്രം കിട്ടിയാലും ഇവരുടെ മൊത്തത്തിലുള്ള സാമ്പത്തികസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ചു പൊതുവായി ചിലതെല്ലാം പറയാം.

- ആരുടെയും മാസവരുമാനത്തിനു 19285 രൂപയിൽനിന്നും ഏറെ വ്യത്യാസമില്ല.
- 19285 രൂപയിൽ കൂടുതൽ മാസവരുമാനമുള്ളവരുടെ എണ്ണവും, കുറവ് മാസ വരുമാനമുള്ളവരുടെ എണ്ണവും ഏറക്കുറെ തുല്യമാണ്.

ഇനി ഇവരുടെ അടുത്തുതന്നെ 200000 രൂപ മാസവരുമാനമുള്ള ഒരാൾ കൂടി താമസമാക്കിയെന്നു കരുതുക. ഇപ്പോൾ ഈ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മാധ്യവരുമാനം എത്രയാണ്?

$$\frac{19285 \times 10 + 200000}{11} = 35714 \text{ രൂപ}$$

ഇനി ഈ വിവരങ്ങളൊന്നും പറയാതെ ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ മാധ്യം മാത്രം പറഞ്ഞാൽ ഈ 11 കുടുംബങ്ങളുടെയെല്ലാം മാസവരുമാനം ഏകദേശം 35000 രൂപയാണെന്ന തെറ്റായ ധാരണ ഉണ്ടാകില്ലേ? ഒരു കാര്യത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന കുറെ സംഖ്യകളെ, പൊതുവായ ധാരണ നൽകാൻ പറ്റിയ ഒരു സംഖ്യയായി ചുരുക്കുക എന്നതിനാണല്ലോ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നത്. പക്ഷെ കൂട്ടത്തിലെ സംഖ്യകളേക്കാൾ വളരെ വലുതോ തീരെ ചെറുതോ ആയ സംഖ്യകൾ മാധ്യത്തെ വളരെയധികം സ്വാധീനിക്കും.

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ, പതിനൊന്നാമത്തെ വലിയ സംഖ്യയാണ് മാധ്യത്തെ വല്ലാതെ മാറ്റിക്കളഞ്ഞത്. ഇതുപോലെ മാധ്യത്തെ സംബന്ധിച്ച പൊതുധാരണ തെറ്റിക്കുന്ന മറ്റുദാഹരണങ്ങൾ പറയാമോ?

മറ്റൊരു ശരാശരി

നമ്മുടെ ഉദാഹരണത്തിലെ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനത്തെക്കുറിച്ച് ശരിയായ സൂചന നൽകുന്ന മറ്റൊരു സംഖ്യ കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

സംഖ്യകളെല്ലാം വലുപ്പക്രമത്തിലെഴുതാം.

16500, 17000, 17500, 18000, 18600, 19500, 21000, 21050, 21700, 22000, 200000

ഇതിൽ നടുക്കുള്ള 19500 എന്ന സംഖ്യ എടുക്കുക. 5 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസ വരുമാനം 19500 നേക്കാൾ കുറവും 5 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം 19500 നേക്കാൾ കൂടുതലുമാണ്. 19500 നെ മുകളിലെഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ മധ്യമം (Median) എന്നുപറയുന്നു.

ഇനി ആദ്യത്തെ 10 കുടുംബങ്ങൾ മാത്രമെടുത്ത് മാസവരുമാനം ക്രമമായെഴുതിയാൽ, നടുക്ക് ഒരു സംഖ്യക്കു പകരം, 18600, 19500 എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകൾ വരും. ഇവിടേയും മധ്യമമായെടുക്കേണ്ടത്, അതിനേക്കാൾ കുറഞ്ഞവയുടെ എണ്ണവും കൂടിയവയുടെ എണ്ണവും തുല്യമാകുന്ന തലത്തിലാണ്. സാധാരണയായി 18600 ന്റെയും 19500 ന്റെയും ശരാശരിയാണ് എടുക്കാറ്. അതായത് ആദ്യത്തെ പത്ത് കുടുംബങ്ങളുടെ മധ്യമ മാസവരുമാനം $\frac{18600+19500}{2} = 19050$ രൂപ.

ഇവിടെ മധ്യമമായ 19050 രൂപയും മാധ്യമായ 19285 രൂപയും ആദ്യത്തെ 10 കുടുംബങ്ങളുടെ സാമ്പത്തികസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ചു പൊതുവായ ധാരണ തരുന്നുണ്ടല്ലോ. പതിനൊന്നാമത്തെ കുടുംബത്തിന്റെ വലിയ വരുമാനം മധ്യമത്തിൽ വലിയ മാറ്റമുണ്ടാക്കുന്നില്ല എന്നതാണവിടെ പ്രധാനം.

ചെയ്തുനോക്കാം

1. ലോങ്ജമ്പ് പരിശീലനത്തിൽ ഒരാൾ ചാടിയ ദൂരങ്ങൾ മീറ്ററിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. 6.20, 6.15, 6.18, 6.3, 1005, 6.4, 6.35 ഇവയുടെ മധ്യമവും മാധ്യവും കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. കേരളത്തിലെ വിവിധ ജില്ലകളിൽ ഒരുമാസം പെയ്ത മഴയുടെ അളവു രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

ജില്ല	മഴയുടെ അളവ് (മില്ലിമീറ്റർ)
കാസർഗോഡ്	66.7
കണ്ണൂർ	56.9
കോഴിക്കോട്	33.5
വയനാട്	20.5
മലപ്പുറം	13.5
പാലക്കാട്	56.9
തൃശൂർ	53.4
എറണാകുളം	70.6
കോട്ടയം	50.3
ഇടുക്കി	30.5
പത്തനംതിട്ട	56.4
ആലപ്പുഴ	45.5
കൊല്ലം	56.3
തിരുവനന്തപുരം	89

ഈ മാസത്തിൽ കേരളത്തിൽ പെയ്ത മഴയുടെ മാധ്യവും മധ്യമവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

3. സമാന്തരശ്രേണിയിലുള്ള കുറെ സംഖ്യകളെടുക്കുക. ഇവയുടെ മധ്യമവും മാധ്യവും തുല്യമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

ആവൃത്തിയും മധ്യമവും

രക്തത്തിലെ ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ്, സാധാരണയായി ഒരു ഡെസിലിറ്ററിൽ എത്ര ഗ്രാം എന്നാണ് പറയുന്നത്. 23 ആളുകളുടെ രക്തപരിശോധന നടത്തി കിട്ടിയ ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവാണു താഴെ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ് (ഗ്രാം/ഡെസിലിറ്റർ)	ആളുകളുടെ എണ്ണം
12	2
12.4	3
12.7	5
13.1	6
13.3	4
13.6	3

ഇതിൽനിന്നു ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവിന്റെ മധ്യമം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ഈ പട്ടികയിലെ 23 ആളുകളിൽ 11 പേരുടെ അളവ് മധ്യമത്തേക്കാൾ കുറവായിരിക്കണം. 11 പേരുടേത് കൂടുതലും. അളവുകളുടെ ക്രമത്തിൽ ആളുകളെ നിരത്തി നിർത്തി, പന്ത്രണ്ടാമത്തെ ആളുടെ ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവെടുത്താൽ മധ്യമം കിട്ടും. ചിത്രത്തിൽ നോക്കിയാൽ പന്ത്രണ്ടാമൻ, നാലാമത്തെ കൂട്ടത്തിൽ രണ്ടാമതായിട്ടാണെന്ന് കാണാം. അപ്പോൾ മധ്യമം ഈ ആളുടെ ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവായ 13.1 ആയിരിക്കും.

ചിത്രത്തിനു പകരം ഇതൊരു പട്ടികയാക്കാം.

ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ് (ഗ്രാം/ഡെസിലിറ്റർ)	ആളുകളുടെ എണ്ണം
12 വരെ	2
12.4 വരെ	5
12.7 വരെ	10
13.1 വരെ	16
13.3 വരെ	20
13.6 വരെ	23

പട്ടികയിൽനിന്നും 11 മുതൽ 16 വരെയുള്ള സ്ഥാനങ്ങളിലെ ആളുകളുടെ ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ് 13.1 ആണെന്നു കാണാം. മൊത്തം ആളുകളുടെ നടുക്കുള്ള പന്ത്രണ്ടാം സ്ഥാനക്കാരനും ഇക്കൂട്ടത്തിലായതിനാൽ, മധ്യമം 13.1 എന്നു കണക്കാക്കാം.

ആളുകളുടെ എണ്ണം വളരെ കൂടുതലാകുമ്പോൾ പട്ടികയാക്കി ചെയ്യുന്നതല്ലേ നല്ലത്.

1. ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ, ഒരു പ്രദേശത്തെ 35 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം തന്നിരിക്കുന്നു. മധ്യമവരുമാനം കണക്കാക്കുക.

മാസവരുമാനം (രൂപ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
7000	3
8000	7
9000	8
10000	5
11000	5
12000	4
13000	3

2. ഒരു ആശുപത്രിയിൽ ഒരാഴ്ച പിറന്ന നവജാതശിശുക്കളുടെ ഭാരമനുസരിച്ച് എണ്ണം തിരിച്ച പട്ടികയാണ് താഴെയുള്ളത്. ഭാരത്തിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

ശിശുക്കളുടെ ഭാരം	ശിശുക്കളുടെ എണ്ണം
2.8	5
2.9	1
3.0	7
3.1	10
3.2	12
3.3	4
4.1	1

വിഭാഗങ്ങളും മധ്യമവും

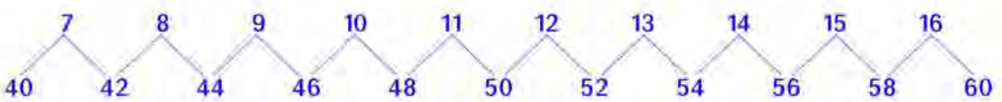
ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികൾക്ക് പരീക്ഷയിൽ കിട്ടിയ മാർക്കാണു പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നത്. രണ്ട് കുട്ടികൾക്ക് ഇരുപതിൽ താഴെയാണ് മാർക്ക്. 20 നും 40 നും ഇടയിൽ മാർക്ക് കിട്ടിയ 4 കുട്ടികളുണ്ട്. 40 നും 60 നും ഇടയിലായി 10 കുട്ടികളും 60 നും 80നും ഇടയിലായി 6 കുട്ടികളും 80 നും 100 നും ഇടയിലായി 3 കുട്ടികളുമുണ്ട്. ഈ ക്ലാസിലെ മധ്യമ മാർക്ക് കണ്ടുപിടിക്കണം.

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0-20	2
20-40	4
40-60	10
60-80	6
80-100	3

ആകെയുള്ള 25 കുട്ടികളെ മാർക്കനുസരിച്ച് ക്രമീകരിച്ചാൽ, നടുക്ക് വരുന്ന പതിമൂന്നാമത്തെ കുട്ടിയുടെ മാർക്കാണ് നമുക്കു വേണ്ടത്. ഈ കുട്ടി ഏതു വിഭാഗമെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഓരോ വിഭാഗങ്ങളിലുമുള്ളവരെ ചേർക്കുമ്പോൾ ആകെ എത്ര കുട്ടികളാകുമെന്നു നോക്കാം.

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
20 വരെ	2
40 വരെ	6
60 വരെ	16
80 വരെ	22
100 വരെ	25

ഇവിടെ ഏഴാമത്തെ കുട്ടിമുതൽ പതിനാറാമത്തെ കുട്ടിവരെയുള്ളവർക്ക് 40 നും 60 നും ഇടയിലാണ് മാർക്കെന്നു കാണാം. പക്ഷെ ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടിയ മാർക്ക് അറിയില്ല. ഈ വിഭാഗത്തിൽ 16– 6 = 10 കുട്ടികളുണ്ട്. 40 മുതൽ 60 വരെയുള്ള മാർക്കിനെ 10 സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ഓരോ ഉപവിഭാഗത്തിനും ഓരോ കുട്ടി എന്നെടുക്കാം.



അതായത് ഏഴാമത്തെ കുട്ടി 40-42 ഉപവിഭാഗത്തിൽ, എട്ടാമത്തെ കുട്ടി 42-44 ഉപവിഭാഗത്തിൽ... അങ്ങനെ പതിമൂന്നാമത്തെ കുട്ടി 52-54 ഉപവിഭാഗത്തിലുമായിട്ട് വരും. ഓരോ കുട്ടിയുടെ യും മാർക്ക്, ആ കുട്ടി ഉൾപ്പെടുന്ന ഉപവിഭാഗത്തിന്റെ കൃത്യം നടുക്കായി സങ്കൽപ്പിക്കാം. അപ്പോൾ പതിമൂന്നാമത്തെ കുട്ടിക്ക് 53 മാർക്ക്. മധ്യമം മാർക്ക് 53 എന്ന് കണക്കാക്കാം.

ഇതുപോലെ മറ്റൊരു കണക്കും നോക്കിയാലോ. ഒരു സ്ഥാപനത്തിൽ പണിയെടുക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം, പ്രായമനുസരിച്ച് പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. മധ്യമ പ്രായം കണക്കാക്കാം.

പ്രായം	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
20-30	14
30-40	6
40-50	5
50-60	19
ആകെ	44

പ്രായവിഭാഗങ്ങളെ ചേർത്ത് ആകെ തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം പട്ടികയായി എഴുതാം.

പ്രായം	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
30 നേക്കാൾ കുറവ്	14
40 നേക്കാൾ കുറവ്	20
50 നേക്കാൾ കുറവ്	25
60 നേക്കാൾ കുറവ്	44

ഇതനുസരിച്ച്, പ്രായക്രമത്തിൽ 21 മുതൽ 25 വരെയുള്ള സ്ഥാനത്തുവരുന്ന 5 പേർ, 40 തൊട്ട് 50 നു താഴെ പ്രായമുള്ളവരാണ്. ഇവിടെ മൊത്തം തൊഴിലാളികൾ 44 പേരായതുകൊണ്ട്, നമുക്കാവശ്യമായ 22 ഉം 23 ഉം സ്ഥാനത്തുള്ളവർ ഇക്കൂട്ടത്തിലാണ്.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ 40 മുതൽ 50 വരെയുള്ള 10 വർഷത്തെ 5 സമ ഭാഗങ്ങളാക്കി ഓരോ ഉപവിഭാഗത്തിലും ഒരാൾ വീതമുണ്ടെന്നും അത്തരമൊരാളുടെ പ്രായം ഉപവിഭാഗത്തിന്റെ നടുക്കുള്ള സംഖ്യയാണെന്നും സങ്കൽപ്പിക്കുക. അപ്പോൾ 22-ാം സ്ഥാനത്തുള്ള ആളുടെ പ്രായം 42 നും 44 നും നടുക്കുള്ള 43 ആയും 23-ാം സ്ഥാനത്തുള്ള ആളുടെ പ്രായം 44 നും 46 നും നടുക്കുള്ള 45 ആയും കിട്ടും. 43 ന്റെയും 45 ന്റെയും മാധ്യമായ 44 ആണു മധ്യമപ്രായം.

- താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിലെ ആളുകളുടെ മധ്യമ വയസ്സ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

വയസ്സ്	ആളുകളുടെ എണ്ണം
0-15	2
15-30	5
30-45	10
45-60	15
60-75	6
75-90	3

- ഒരു പ്രദേശത്തെ കുറെ വീടുകളിലെ വൈദ്യുതി ഉപഭോഗമാണ് താഴെ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നത്. മധ്യമ ഉപഭോഗം എത്രയായിരിക്കും.

വൈദ്യുതി ഉപഭോഗം (യൂണിറ്റ്)	വീടുകളുടെ എണ്ണം
80-90	4
90-100	8
100-110	5
110-120	5
120-130	9
130-140	4

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

❖ ഒരുകൂട്ടം സംഖ്യകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിനു മാധ്യം ഉപയോഗിക്കാൻ പറ്റാത്ത സന്ദർഭങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുന്നു.

❖ ഒരുകൂട്ടം സംഖ്യകളുടെ മധ്യമം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.

❖ വിഭാഗ പട്ടികയിൽനിന്നും മധ്യമം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.